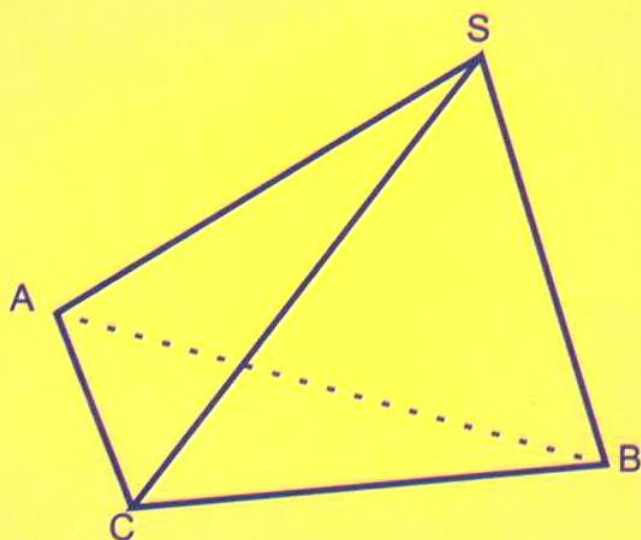


NGUYỄN VŨ THANH-TRẦN MINH CHIẾN

# GIẢI BÀI TẬP

# HÌNH HỌC



# 11



NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

NGUYỄN VŨ THANH - TRẦN MINH CHIẾN

*Giải bài tập*  
**HÌNH HỌC 11**



NHÀ XUẤT BẢN  
ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

Đơn vị liên kết :  
Công ty sách hoa hồng



## *Lời nói đầu*

Quyển sách **GIẢI BÀI TẬP HÌNH HỌC 11** này được biên soạn theo chương trình Hình học 11 hiện hành, được trình bày như sau:

- Tóm tắt kiến thức.
- Phương pháp giải bài tập.
- Bài tập làm thêm.

Nhằm giúp các em không có điều kiện ôn tập theo nhóm có tài liệu tham khảo ôn tập, rèn luyện hoặc để so sánh với kết quả tự ôn tập ở nhà của mình.

Quý thầy cô và quý phụ huynh xem đây như tài liệu tham khảo thêm.

Chúng tôi xin chân thành đón nhận ý kiến xây dựng từ quý độc giả.

**NHÓM BIÊN SOẠN**

# Chương I. PHÉP DỜI HÌNH VÀ PHÉP ĐỒNG DẠNG TRONG MẶT PHẪNG

## §1. PHÉP BIẾN HÌNH §2. PHÉP TỊNH TIẾN

### A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

#### 1. Định nghĩa phép biến hình

Quy tắc đặt tương ứng mỗi điểm  $M$  của mặt phẳng với một điểm xác định duy nhất  $M'$  của mặt phẳng đó được gọi là phép biến hình trong mặt phẳng.

#### 2. Định nghĩa phép tịnh tiến

Trong mặt phẳng cho vectơ  $\vec{v}$ . Phép biến hình biến mỗi điểm  $M$  thành điểm  $M'$  sao cho  $\overrightarrow{MM'} = \vec{v}$  được gọi là phép tịnh tiến theo vectơ  $\vec{v}$

$$T_{\vec{v}}(M) = M' \Leftrightarrow \overrightarrow{MM'} = \vec{v}.$$

#### 3. Các tính chất

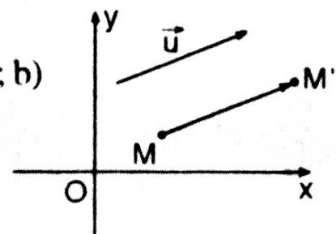
a. *Tính chất 1:* Nếu  $T_{\vec{v}}(M) = M'$ ,  $T_{\vec{v}}(N) = N'$  thì  $\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{MN}$  và từ đó suy ra  $M'N' = MN$ .

b. *Tính chất 2:* Phép tịnh tiến biến đường thẳng thành đường thẳng song song hoặc trùng với nó, biến đoạn thẳng thành đoạn thẳng bằng nó, biến tam giác thành tam giác bằng nó, biến đường tròn thành đường tròn cùng bán kính.

#### 4. Biểu thức tọa độ

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho phép tịnh tiến theo  $\vec{u} = (a; b)$

Giả sử  $T_{\vec{u}} M(x; y) \mapsto M'(x'; y')$ . Ta có: 
$$\begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \end{cases}$$



### B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

#### 1. Chứng minh rằng: $M' = T_{\vec{v}}(M) \Leftrightarrow M = T_{-\vec{v}}(M')$ .

*Giải*

Ta có:  $M' = T_{\vec{v}}(M) \Leftrightarrow \overrightarrow{MM'} = \vec{v} \Leftrightarrow \overrightarrow{M'M} = -\vec{v} \Leftrightarrow M = T_{-\vec{v}}(M')$

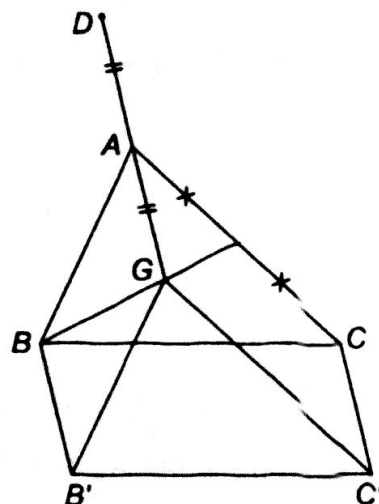
2. Cho tam giác ABC có G là trọng tâm. Xác định ảnh của tam giác ABC qua phép tịnh tiến theo vectơ  $\overrightarrow{AG}$ . Xác định điểm D sao cho phép tịnh tiến theo vectơ  $\overrightarrow{AG}$  biến D thành A.

*Giải*

Dựng các hình bình hành  $ABB'G$  và  $ACC'G$ . Khi đó ảnh của tam giác ABC qua phép tịnh tiến theo vectơ  $\overrightarrow{AG}$  là tam giác  $GB'C'$ .

Dựng điểm D sao cho A là trung điểm của GD. Khi đó

$\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{AG}$ . Do đó  $T_{\overrightarrow{AG}}(D) = A$ .



3. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho vectơ  $\vec{v} = (-1; 2)$ , hai điểm  $A(3; 5)$ ,  $B(-1; 1)$  và đường thẳng d có phương trình  $x - 2y + 3 = 0$ .

- Tìm tọa độ của các điểm  $A'$ ,  $B'$  theo thứ tự là ảnh của A, B qua phép tịnh tiến theo  $\vec{v}$ .
- Tìm tọa độ của điểm C sao cho A là ảnh của C qua phép tịnh tiến theo  $\vec{v}$ .
- Tìm phương trình của đường thẳng d' là ảnh của d qua phép tịnh tiến theo  $\vec{v}$ .

*Giải*

Biểu thức tọa độ của phép tịnh tiến  $T_{\vec{v}}$  là  $\begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = x - 1 \\ y' = y + 2 \end{cases}$

- Tọa độ  $A'$  là ảnh của A qua  $T_{\vec{v}}$  là  $\begin{cases} x_{A'} = x_A - 1 = 2 \\ y_{A'} = y_A + 2 = 7 \end{cases} \Rightarrow A'(2; 7)$

Tương tự  $T_{\vec{v}}(B) = B'(-2; 3)$

- $A = T_{\vec{v}}(C) \Rightarrow C = T_{-\vec{v}}(A) = (4; 3)$ .

- Gọi  $M(x; y)$  thuộc d,  $M' = T_{\vec{v}}(M) = (x'; y')$ .

Khi đó  $x' = x - 1$ ,  $y' = y + 2$  hay  $x = x' + 1$ ,  $y = y' - 2$ .

Ta có  $M \in d \Leftrightarrow x - 2y + 3 = 0 \Leftrightarrow (x' + 1) - 2(y' - 2) + 3 = 0$

$\Leftrightarrow x' - 2y' + 8 = 0 \Leftrightarrow M' \in d'$  có phương trình  $x - 2y + 8 = 0$ .

Vậy d' có phương trình  $x - 2y + 8 = 0$ .

4. Cho hai đường thẳng a và b song song với nhau. Hãy chỉ ra một phép tịnh tiến biến a thành b. Có bao nhiêu phép tịnh tiến như thế?



### Giải

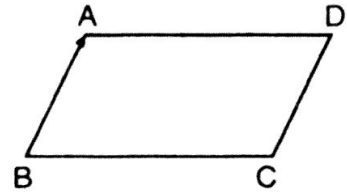
Lấy hai điểm A và B bất kì theo thứ tự thuộc a và b. Khi đó phép tịnh tiến theo vectơ  $\overrightarrow{AB}$  sẽ biến a thành b. Vậy có vô số phép tịnh tiến biến a thành b.

## C. BÀI TẬP LÀM THÊM

1. Một hình bình hành ABCD có hai đỉnh A, B cố định, còn đỉnh C thay đổi trên một đường tròn (O). Tìm quỹ tích đỉnh D.

### Hướng dẫn

ABCD là hình bình hành nên:  $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BA}$ . Phép tịnh tiến  $T_{\overrightarrow{BA}}$  biến C thay đổi trên đường tròn (O) thì quỹ tích đỉnh D là đường tròn (O') ảnh của đường tròn (O) qua phép tịnh tiến  $T_{\overrightarrow{BA}}$ .



2. Cho hai đường tròn (O) và (O') và hai điểm A, B. Tìm điểm M trên (O) và điểm M' trên (O') sao cho  $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{AB}$ .

### Hướng dẫn

M cần tìm là giao điểm (nếu có) của (O') với đường tròn (O<sub>1</sub>) ảnh của (O) qua phép tịnh tiến  $\overrightarrow{AB}$ .

3. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho đường tròn (c) có phương trình:

$$x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0.$$

Tìm ảnh của (c) qua phép tịnh tiến vectơ  $\vec{v} = (-2; 3)$ .

ĐS:  $(x + 1)^2 + (y - 1)^2 = 9$ .

## §3. PHÉP ĐỐI XỨNG TRỰC

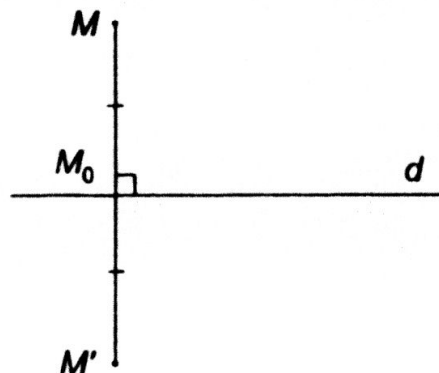
### A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

#### 1. Định nghĩa

Cho đường thẳng d. Phép biến hình biến mỗi điểm M thuộc d thành chính nó, biến mỗi điểm M không thuộc d thành M' sao cho d là đường trung trực của đoạn thẳng MM' được gọi là phép đối xứng qua đường thẳng d hay phép đối xứng trục d.

Đường thẳng d được gọi là trục của phép đối xứng trục hoặc đơn giản là trục đối xứng.

Phép đối xứng trục d thường được kí hiệu là  $D_d$ .



## 2. Biểu thức tọa độ

Biểu thức tọa độ của phép đối xứng qua trục Ox là 
$$\begin{cases} x' = x \\ y' = -y \end{cases}$$

## 3. Các tính chất

*Tính chất 1:* Phép đối xứng trục bảo toàn khoảng cách giữa hai điểm bất kì.

*Tính chất 2:* Phép đối xứng trục biến đường thẳng thành đường thẳng, biến đoạn thẳng thành đoạn thẳng bằng nó, biến tam giác thành tam giác bằng nó, biến đường tròn thành đường tròn cùng bán kính.

## 4. Tâm đối xứng của một hình

*Định nghĩa:* Đường thẳng  $d$  được gọi là trục đối xứng của hình  $\mathcal{H}$  nếu phép đối xứng qua  $d$  biến  $\mathcal{H}$  thành chính nó.

Khi đó ta nói  $\mathcal{H}$  là hình có trục đối xứng.

## B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

1. Trong mặt phẳng Oxy cho hai điểm  $A(1; -2)$  và  $B(3; 1)$ . Tìm ảnh của  $A, B$  và đường thẳng  $AB$  qua phép đối xứng trục Ox.

*Giải*

Gọi  $A', B'$  lần lượt là ảnh của  $A, B$  qua phép đối xứng trục Ox ta có:  $A'(1; 2)$ ,  $B'(3; -1)$ .

Phương trình đường thẳng  $A'B'$  là:

$$\frac{x-1}{3-1} = \frac{y-2}{-1-2} \Leftrightarrow \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-3} \Leftrightarrow 3x + 2y - 7 = 0.$$

Đường thẳng  $A'B'$  là ảnh của đường thẳng  $AB$  qua phép đối xứng trục Ox.

2. Trong mặt phẳng Oxy cho đường thẳng  $d$  có phương trình  $3x - y + 2 = 0$ . Viết phương trình của đường thẳng  $d'$  là ảnh của  $d$  qua phép đối xứng trục Oy.

*Giải*

Lấy hai điểm  $A(0; 2)$  và  $B(-1; -1)$  thuộc  $d$ . Gọi  $A' = D_{(Oy)}(A)$ ,  $B' = D_{(Oy)}(B)$ .

Khi đó  $A'(0; 2)$ ,  $B'(1; -1)$ . Vậy  $d'$  có phương trình  $\frac{x}{1} = \frac{y-2}{-3}$ , hay  $3x + y - 2 = 0$ .

*Cách khác.* Gọi  $M'(x'; y')$  là ảnh của  $M(x; y)$  qua phép đối xứng trục Oy. Khi đó  $x' = -x$  và  $y' = y$ .

Ta có  $M \in d \Leftrightarrow 3x - y + 2 = 0 \Leftrightarrow -3x' - y' + 2 = 0 \Leftrightarrow M'$  thuộc đường thẳng  $d'$  có phương trình  $3x + y - 2 = 0$ .

3. Trong các chữ cái sau, chữ nào là hình có trục đối xứng?

V I E T N A M  
W  
O

*Trả lời:* Các chữ cái V, I, E, T, A, M, W, O là những hình có trục đối xứng.

### C. BÀI TẬP LÀM THÊM

1. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường tròn ( $\mathcal{C}$ ):  $(x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 4$ .

Viết phương trình ảnh của ( $\mathcal{C}$ ) qua phép đối xứng có trục Ox.

Đáp số:  $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 4$

2. Tam giác MND gọi là nội tiếp trong tam giác ABC nếu ba đỉnh của MND nằm trên ba cạnh của tam giác ABC. Hãy tìm tam giác nội tiếp tam giác ABC cho trước sao cho nó có chu vi nhỏ nhất.

*Hướng dẫn:* D là chân đường cao  $\Delta ABC$ ; M, N lần lượt là giao điểm của  $D_1D_2$  với AB và BC (với  $D_1, D_2$  là các điểm đối xứng của D qua AB và BC).

3. Cho tam giác ABC với trực tâm H.

a) Chứng minh rằng các đường tròn ngoại tiếp các tam giác HAB, HBC, HCA có bán kính bằng nhau.

b) Gọi  $O_1, O_2, O_3$  là tâm các đường tròn nói trên. Chứng minh rằng đường tròn đi qua ba điểm  $O_1, O_2, O_3$  bằng đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

*Hướng dẫn:* Các đường tròn ngoại tiếp  $\Delta HAB, \Delta HBC, \Delta HCA$  có bán kính bằng với đường tròn ngoại tiếp (O) của  $\Delta ABC$  do điểm đối xứng của H qua các cạnh  $\Delta ABC$  nằm trên (O).



## §4. PHÉP ĐỐI XỨNG TÂM

### A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

#### 1. Định nghĩa

Cho điểm  $I$ . Phép biến hình biến điểm  $I$  thành chính nó, biến mỗi điểm  $M$  khác  $I$  thành  $M'$  sao cho  $I$  là trung điểm của đoạn thẳng  $MM'$  được gọi là phép đối xứng tâm  $I$ .

#### 2. Biểu thức tọa độ của phép đối xứng qua gốc tọa độ

Cho  $M(x; y)$ ,  $M' = D_O(M) = (x'; y')$ , khi đó 
$$\begin{cases} x' = -x \\ y' = -y \end{cases}$$

#### 3. Tính chất

*Tính chất 1:* Nếu  $D_I(M) = M'$  và  $D_I(N) = N'$  thì  $\overline{M'N'} = -\overline{MN}$ , từ đó suy ra  $M'N' = MN$ .

*Tính chất 2:* Phép đối xứng tâm biến đường thẳng thành đường thẳng song song hoặc trùng với nó, biến đoạn thẳng thành đoạn thẳng bằng nó, biến tam giác thành tam giác bằng nó, biến đường tròn thành đường tròn cùng bán kính.

#### 4. Tâm đối xứng của một hình

*Định nghĩa:* Điểm  $I$  được gọi là tâm đối xứng của hình  $\mathcal{H}$  nếu phép đối xứng tâm  $I$  biến  $\mathcal{H}$  thành chính nó.

Khi đó ta nói  $\mathcal{H}$  là hình có tâm đối xứng.

### B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

1. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho điểm  $A(-1; 3)$  và đường thẳng  $d$  có phương trình  $x - 2y + 3 = 0$ . Tìm ảnh của  $A$  và  $d$  qua phép đối xứng tâm  $O$ .

*Giải*

Ảnh của  $A$  qua phép đối xứng tâm  $O$  là  $A'(1; -3)$ .

Gọi  $M'(x'; y')$  là ảnh của  $M(x; y)$  qua phép đối xứng tâm  $O$ .

Khi đó  $x' = -x$ ,  $y' = -y$ .

Ta có  $M \in d \Leftrightarrow x - 2y + 3 = 0 \Leftrightarrow -x' + 2y' + 3 = 0 \Leftrightarrow x' - 2y' - 3 = 0$

$\Leftrightarrow M'$  thuộc đường thẳng  $d'$  có phương trình  $x - 2y - 3 = 0$ .

2. Trong các hình tam giác đều, hình bình hành, ngũ giác đều, lục giác đều, hình nào có tâm đối xứng?

*Trả lời:* Hình bình hành và lục giác đều là những hình có tâm đối xứng.

3. Tìm một hình có vô số tâm đối xứng.

*Trả lời:* Đường thẳng và hình gồm hai đường thẳng song song là những hình có vô số tâm đối xứng.

### C. BÀI TẬP LÀM THÊM

1. Cho góc  $xAy$  và  $O$  là một điểm trong góc đó. Hãy dựng qua  $O$  đường thẳng cắt hai cạnh  $Ax, Ay$  theo thứ tự tại  $M, N$  sao cho  $O$  là trung điểm của  $MN$ .

*Hướng dẫn:* Dựng điểm  $A'$  đối xứng với  $A$  qua  $O$ . Khi đó từ giác  $AMA'N$  là hình bình hành.

2. Dựng hình bình hành biết trung điểm ba cạnh của nó là  $M, N, P$ .

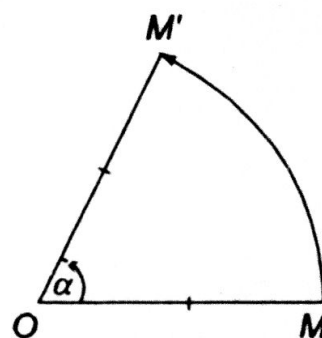
*Hướng dẫn:* Dựng  $N'$  là điểm đối xứng của  $N$  qua trung điểm của  $MP$ .

## §5. PHÉP QUAY

### A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

#### 1. Định nghĩa

Cho điểm  $O$  và góc lượng giác  $\alpha$ . Phép biến hình biến  $O$  thành chính nó, biến mỗi điểm  $M$  khác  $O$  thành điểm  $M'$  sao cho  $OM' = OM$  và góc lượng giác  $(OM; OM')$  bằng  $\alpha$  được gọi là phép quay tâm  $O$  góc  $\alpha$ .



Điểm  $O$  được gọi là tâm quay còn  $\alpha$  được gọi là góc quay của phép quay đó.

Phép quay tâm  $O$  góc  $\alpha$  thường được kí hiệu là  $Q_{(O, \alpha)}$ .

#### 2. Tính chất

*Tính chất 1:* Phép quay bảo toàn khoảng cách giữa hai điểm bất kì.

*Tính chất 2:* Phép quay biến đường thẳng thành đường thẳng, biến đoạn thẳng thành đoạn thẳng bằng nó, biến tam giác thành tam giác bằng nó, biến đường tròn thành đường tròn cùng bán kính.

## B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

1. Cho hình vuông ABCD tâm O.

- Tìm ảnh của điểm C qua phép quay tâm A góc  $90^\circ$ .
- Tìm ảnh của đường thẳng BC qua phép quay tâm O góc  $90^\circ$ .

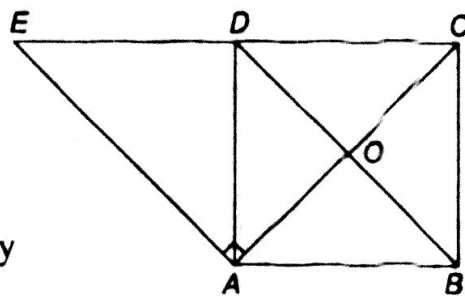
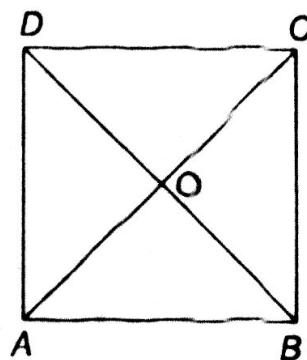
*Giải*

- Gọi E là điểm đối xứng với C qua tâm D.

Khi đó  $Q_{(A, 90^\circ)}(C) = E$ .

- $Q_{(O, 90^\circ)}(B) = C$ ,  $Q_{(O, 90^\circ)}(C) = D$ .

Vậy ảnh của đường thẳng BC qua phép quay tâm O góc  $90^\circ$  là đường thẳng CD.



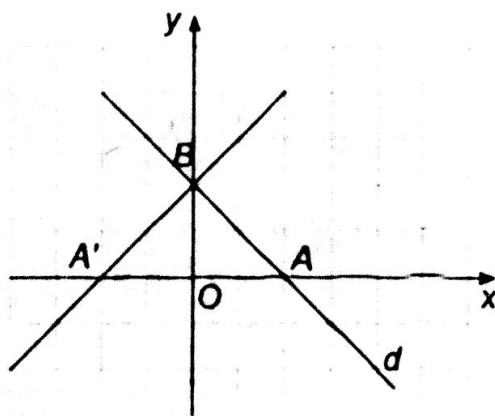
2. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho điểm  $A(2; 0)$  và đường thẳng  $d$  có phương trình  $x + y - 2 = 0$ . Tìm ảnh của A và  $d$  qua phép quay tâm O góc  $90^\circ$ .

*Giải*

Gọi B là ảnh của A qua phép quay  $Q_{(O, 90^\circ)}$ , ta có  $B(0; 2)$ ; A và B thuộc  $d$ .

Ta có:  $A' = Q_{(O, 90^\circ)}(B) = (-2; 0)$

Vậy ảnh của  $d$  qua phép quay tâm O góc  $90^\circ$  là đường thẳng  $BA'$  có phương trình  $x - y + 2 = 0$ .



## C. BÀI TẬP LÀM THÊM

1. Cho đoạn thẳng AC và B trên đoạn AC (B khác A và C). Về cùng một phía đối với đường thẳng AC dựng hai tam giác đều ABE và BCF. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AF và CE. Chứng minh rằng tam giác BMN là tam giác đều.

*Hướng dẫn:* Sử dụng phép quay  $Q(B, -\frac{\pi}{3})$ .

2. Cho  $\Delta ABC$ . Dựng các hình vuông ABDE và ACFG sao cho D, C thuộc mặt phẳng đối nhau bờ AB, B và F thuộc hai mặt phẳng đối nhau bờ AC. Gọi M, N lần lượt là trung điểm CE và BG. Chứng minh AMN là tam giác vuông cân.

*Hướng dẫn:* Sử dụng phép quay  $Q(A, -\frac{\pi}{2})$ .



## §6. KHÁI NIỆM VỀ PHÉP DỜI HÌNH VÀ HAI HÌNH BẰNG NHAU

### A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

#### 1. Khái niệm về phép dời hình

*Định nghĩa:* Phép dời hình là phép biến hình bảo toàn khoảng cách giữa hai điểm bất kì.

#### 2. Tính chất

Phép dời hình:

- 1) Biến ba điểm thẳng hàng thành ba điểm thẳng hàng và bảo toàn thứ tự giữa các điểm;
- 2) Biến đường thẳng thành đường thẳng, biến tia thành tia, biến đoạn thẳng thành đoạn thẳng bằng nó;
- 3) Biến tam giác thành tam giác bằng nó, biến góc thành góc bằng nó;
- 4) Biến đường tròn thành đường tròn có cùng bán kính.

#### 3. Khái niệm hai hình bằng nhau

*Định nghĩa:* Hai hình được gọi là bằng nhau nếu có một phép dời hình biến hình này thành hình kia.

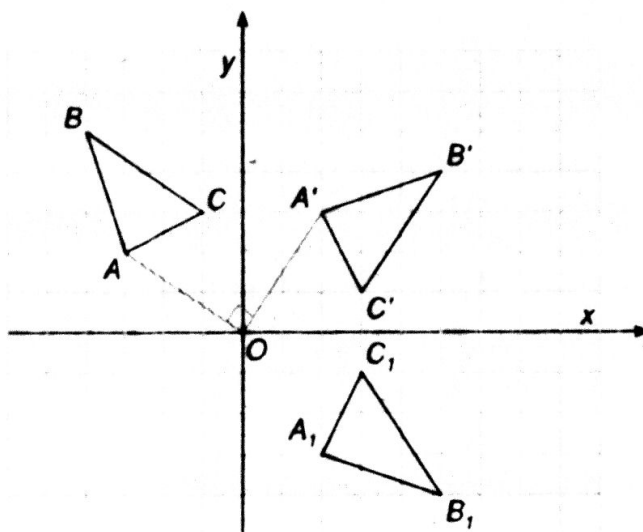
### B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

#### 1. Trong mặt phẳng Oxy cho các điểm $A(-3; 2)$ , $B(-4; 5)$ và $C(-1; 3)$ .

- a) Chứng minh rằng các điểm  $A'(2; 3)$ ,  $B'(5; 4)$  và  $C'(3; 1)$  theo thứ tự là ảnh của  $A$ ,  $B$  và  $C$  qua phép quay tâm  $O$  góc  $-90^\circ$ .
- b) Gọi tam giác  $A_1B_1C_1$  là ảnh của tam giác  $ABC$  qua phép dời hình có được bằng cách thực hiện liên tiếp phép quay tâm  $O$  góc  $-90^\circ$  và phép đối xứng qua trục  $Ox$ . Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác  $A_1B_1C_1$ .

*Giải*

- a) Ta có  $\overrightarrow{OA} = (-3; 2)$ ,  
 $\overrightarrow{OA'} = (2; 3)$  và  $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OA'} = 0$ ,  
tức suy ra góc lượng giác  
 $(OA; OA') = -90^\circ$ . Mặt khác,  
 $OA = OA' = \sqrt{13}$ . Do đó phép  
quay tâm  $O$  góc  $-90^\circ$  biến  $A$   
thành  $A'$ .  
Tương tự  $\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OB'} = \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OC'} = 0$



$$\text{Và } OB = OB' = \sqrt{41}; OC = OC' = \sqrt{10}.$$

$$\text{Do đó } Q_{(O, -\mathbf{u})} : B \mapsto B';$$

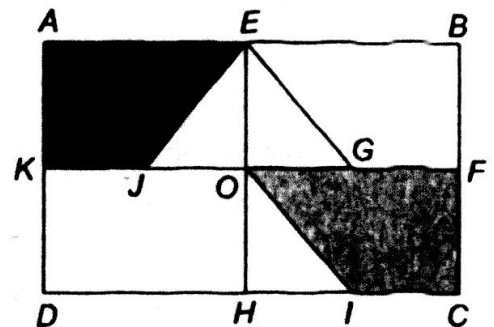
$$C \mapsto C'$$

b) Gọi tam giác  $A_1B_1C_1$  là ảnh của tam giác  $A'B'C'$  qua phép đối xứng trục  $Ox$ . Khi đó  $A_1(2; -3)$ ,  $B_1(5; -4)$ ,  $C_1(3; -1)$ .

2. Cho hình chữ nhật  $ABCD$ . Gọi  $E, F, H, K, O, I, J$  lần lượt là trung điểm của các cạnh  $AB, BC, CD, DA, KF, HC, KO$ . Chứng minh hai hình thang  $AEJK$  và  $FOIC$  bằng nhau.

*Giải*

Gọi  $G$  là trung điểm của  $OF$ . Phép đối xứng qua đường thẳng  $EH$  biến hình thang  $AEJK$  thành hình thang  $BEGF$ . Phép tịnh tiến theo vectơ  $\overrightarrow{EO}$  biến hình thang  $BEGF$  thành hình thang  $FOIC$ . Nên hai hình thang  $AEJK$  và  $FOIC$  bằng nhau.



3. Chứng minh rằng: Nếu một phép dời hình biến tam giác  $ABC$  thành tam giác  $A'B'C'$  thì nó cũng biến trọng tâm của tam giác  $ABC$  tương ứng thành trọng tâm của tam giác  $A'B'C'$ .

*Giải*

Gọi phép dời hình đó là  $F$ . Do  $F$  biến các đoạn thẳng  $AB, BC$  tương ứng thành các đoạn thẳng  $A'B', B'C'$  nên nó cũng biến các trung điểm  $M, N$  của các đoạn thẳng  $AB, BC$  tương ứng theo thứ tự thành các trung điểm  $M', N'$  của các đoạn thẳng  $A'B', B'C'$ . Vậy  $F$  biến các trung tuyến  $AM, CN$  của  $\Delta ABC$  tương ứng thành các trung tuyến  $A'M', C'N'$  của  $\Delta A'B'C'$ . Từ đó suy ra  $F$  biến trọng tâm  $G$  của  $\Delta ABC$  là giao của  $AM$  và  $CN$  thành trọng tâm  $G'$  của  $\Delta A'B'C'$  là giao của  $A'M'$  và  $C'N'$ .

### C. BÀI TẬP LÀM THÊM

Cho hai hình thoi  $ABCD$  và  $A'B'C'D'$  có  $AC = A'C'$ ,  $BD = B'D'$ . Chứng minh rằng hai hình thoi đó bằng nhau.

*Hướng dẫn*

Gọi  $O$  và  $O'$  lần lượt là tâm của hai hình thoi  $ABCD$  và  $A'B'C'D'$ . Rõ ràng hai tam giác  $OAB$  và  $O'A'B'$  bằng nhau nên có phép dời hình  $F$  biến  $O, A, B$  lần lượt thành  $O', A', B'$ . Vì  $F$  bảo toàn khoảng cách và thứ tự của các điểm nên  $F$  biến  $C$  thành  $C'$ ,  $D$  thành  $D'$ . Vậy  $F$  biến  $ABCD$  thành  $A'B'C'D'$ , nghĩa là hai hình thoi đó bằng nhau.

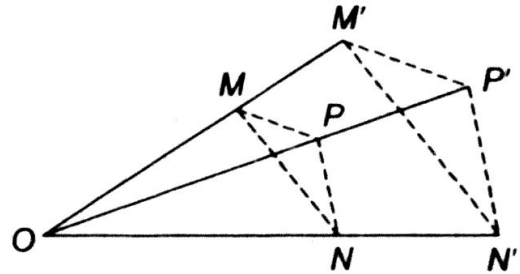
## §7. PHÉP VỊ TỰ

### A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

#### 1. Định nghĩa

Cho điểm  $O$  và số  $k \neq 0$ . Phép biến hình biến mỗi điểm  $M$  thành điểm  $M'$  sao cho  $\overrightarrow{OM'} = k \cdot \overrightarrow{OM}$  được gọi là phép vị tự tâm  $O$ , tỉ số  $k$ .

Phép vị tự tâm  $O$ , tỉ số  $k$  thường được kí hiệu là  $V_{(O,k)}$ .



#### 2. Tính chất

**Tính chất 1:** Nếu phép vị tự tỉ số  $k$  biến hai điểm  $M, N$  tùy ý theo thứ tự thành  $M', N'$  thì  $\overrightarrow{M'N'} = k \cdot \overrightarrow{MN}$  và  $M'N' = |k| \cdot MN$ .

**Tính chất 2:** Phép vị tự tỉ số  $k$ :

- Biến ba điểm thẳng hàng thành ba điểm thẳng hàng và bảo toàn thứ tự giữa các điểm ấy.
- Biến đường thẳng thành đường thẳng song song hoặc trùng với nó, biến tia thành tia, biến đoạn thẳng thành đoạn thẳng.
- Biến tam giác thành tam giác đồng dạng với nó, biến góc thành góc bằng nó.
- Biến đường tròn bán kính  $R$  thành đường tròn bán kính  $|k|R$ .

#### 3. Tâm vị tự của hai đường tròn

**Định lý:** Với hai đường tròn bất kì luôn có một phép vị tự biến đường tròn này thành đường tròn kia.

Tâm của phép vị tự đó được gọi là tâm vị tự của hai đường tròn.

### B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

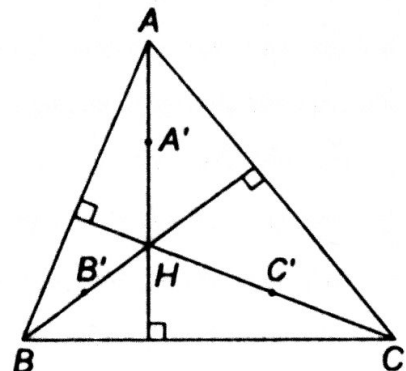
- Cho tam giác  $ABC$  có ba góc nhọn và  $H$  là trực tâm. Tìm ảnh của tam giác  $ABC$  qua phép vị tự tâm  $H$ , tỉ số  $\frac{1}{2}$ .

*Giải*

Ảnh của  $A, B, C$  qua phép vị tự  $V_{\left(H, \frac{1}{2}\right)}$  lần lượt là trung điểm của

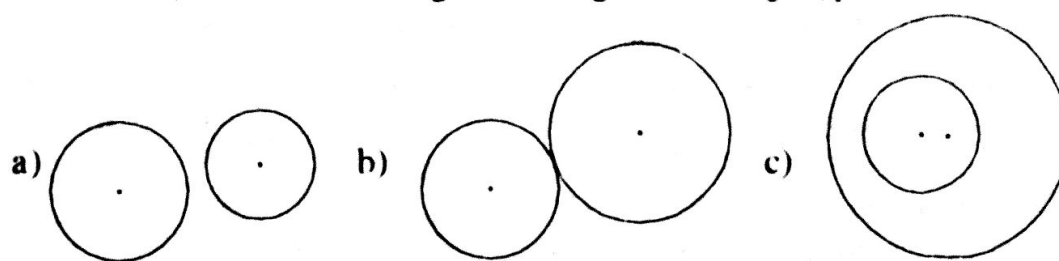
các cạnh  $HA, HB, HC$

$$\text{vì } \overrightarrow{HA'} = \frac{1}{2} \overrightarrow{HA} ; \overrightarrow{HB'} = \frac{1}{2} \overrightarrow{HB} ; \overrightarrow{HC'} = \frac{1}{2} \overrightarrow{HC}$$



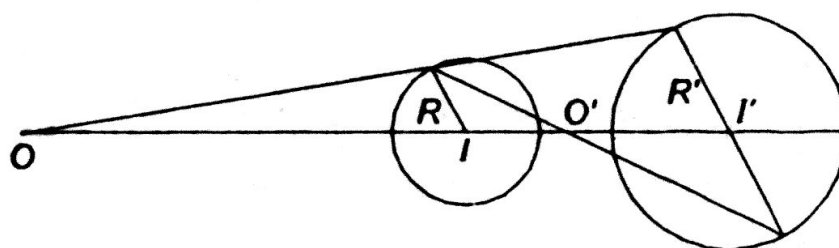


2. Tìm tâm vị tự của hai đường tròn trong các trường hợp sau

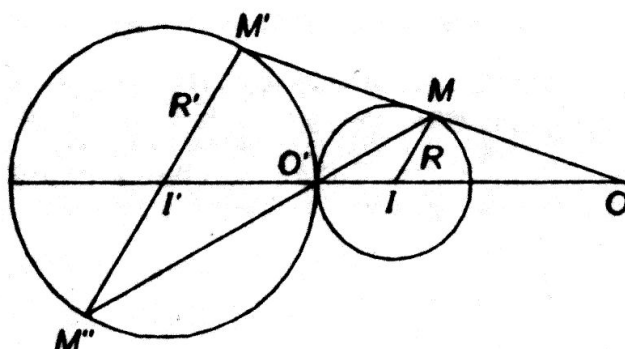


*Giải*

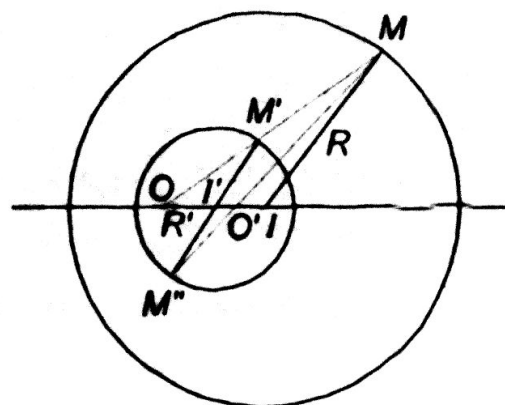
a) Có hai tâm vị tự là  $O$  và  $O'$  tương ứng với các tỉ số vị tự là  $\frac{R'}{R}$  và  $-\frac{R'}{R}$ .



b) Có hai tâm vị tự là  $O$  và  $O'$  tương ứng với các tỉ số vị tự là  $\frac{R'}{R}$  và  $-\frac{R'}{R}$ .



c) Có hai tâm vị tự là  $O$  và  $O'$  tương ứng với các tỉ số vị tự là  $\frac{R'}{R}$  và  $-\frac{R'}{R}$ .



3. Chứng minh rằng khi thực hiện liên tiếp hai phép vị tự tâm  $O$  sẽ được một phép vị tự tâm  $O$ .

*Giải*

Với mỗi điểm  $M$ , gọi  $M' = V_{(O,k)}(M)$ ,  $M'' = V_{(O,p)}(M')$ .

Khi đó  $\overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM}$ ,  $\overrightarrow{OM''} = p\overrightarrow{OM'} = pk\overrightarrow{OM}$ . Từ đó suy ra  $M'' = V_{(O, pk)}(M)$ .  
 Vậy thực hiện liên tiếp hai phép vị tự  $V_{(O, k)}$  và  $V_{(O, p)}$  sẽ được phép vị tự  $V_{(O, pk)}$ .

### C. BÀI TẬP LÀM THÊM

Cho hai đường tròn  $(O)$  và  $(O')$  có bán kính khác nhau tiếp xúc ngoài với nhau với một điểm  $M$  trên  $(O)$ . Dựng một đường tròn đi qua  $M$  và tiếp xúc với hai đường tròn  $(O)$  và  $(O')$ .

**Hướng dẫn:** Xét phép vị tự  $V$  tâm  $I$  tỉ số  $\frac{R'}{R}$  biến  $(O)$  thành  $(O')$  ( $I$  là giao điểm  $MN$  với  $OO'$ ).

## §8. PHÉP ĐỒNG DẠNG

### A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

#### 1. Định nghĩa

Phép biến hình  $F$  được gọi là phép đồng dạng tỉ số  $k$  ( $k > 0$ ), nếu với hai điểm  $M, N$  bất kỳ và ảnh  $M', N'$  tương ứng của chúng ta luôn có  $M'N' = kMN$ .

#### 2. Tính chất

Phép đồng dạng tỉ số  $k$ :

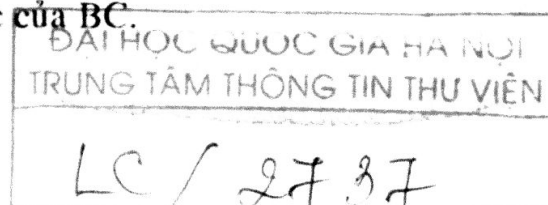
- Biến ba điểm thẳng hàng thành ba điểm thẳng hàng và bảo toàn thứ tự giữa các điểm ấy.
- Biến đường thẳng thành đường thẳng, biến tia thành tia, biến đoạn thẳng thành đoạn thẳng.
- Biến tam giác thành tam giác đồng dạng với nó, biến góc thành góc bằng nó.
- Biến đường tròn bán kính  $R$  thành đường tròn bán kính  $kR$ .

#### 3. Hình đồng dạng

**Định nghĩa:** Hai hình được gọi là đồng dạng với nhau nếu có một phép đồng dạng biến hình này thành hình kia.

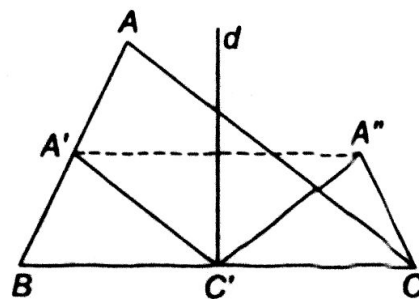
### B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

- Cho tam giác  $ABC$ . Dựng ảnh của nó qua phép đồng dạng có được bằng cách thực hiện liên tiếp phép vị tự tâm  $B$  tỉ số  $\frac{1}{2}$  và phép đối xứng qua đường trung trực của  $BC$ .



*Giải*

Gọi  $A', C'$  tương ứng là trung điểm của  $BA$  và  $BC$ . Phép vị tự tâm  $B$ , tỉ số  $\frac{1}{2}$  biến tam giác  $ABC$  thành tam giác  $A'BC'$ .



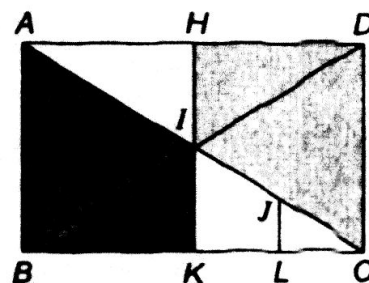
Gọi  $d$  là đường trung trực của  $BC$ ,

$A''$  là điểm đối xứng của  $A'$  qua  $d$ . Phép đối xứng qua đường trung trực của  $BC$  biến tam giác  $A'BC'$  thành tam giác  $A''C'C$ . Vậy ảnh của tam giác  $ABC$  qua phép đồng dạng đó là tam giác  $A''C'C$ .

2. Cho hình chữ nhật  $ABCD$ ,  $AC$  và  $BD$  cắt nhau tại  $I$ . Gọi  $H, K, L$  và  $J$  lần lượt là trung điểm của  $AD, BC, KC$  và  $IC$ . Chứng minh hai hình thang  $JLKI$  và  $IHDC$  đồng dạng với nhau.

*Giải*

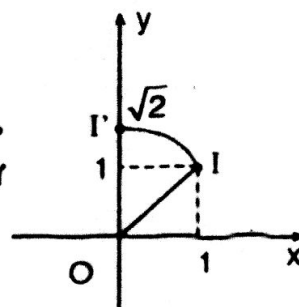
Phép đối xứng tâm  $I$  biến hình thang  $IHDC$  thành hình thang  $IKBA$ . Phép vị tự tâm  $C$  tỉ số  $\frac{1}{2}$  biến hình thang  $IKBA$  thành hình thang  $JLKI$ . Do đó hai hình thang  $JLKI$  và  $IHDC$  đồng dạng với nhau.



3. Trong mặt phẳng Oxy cho điểm  $I(1; 1)$  và đường tròn tâm  $I$  bán kính 2. Viết phương trình của đường tròn là ảnh của đường tròn trên qua phép đồng dạng có được bằng cách thực hiện liên tiếp phép quay tâm  $O$ , góc  $45^\circ$  và phép vị tự tâm  $O$ , tỉ số  $\sqrt{2}$ .

*Giải*

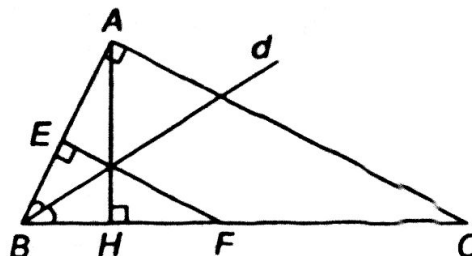
Ta có  $OI = \sqrt{2}$ . Gọi  $I'$  là ảnh của  $I$  qua phép quay tâm  $O$ , góc  $45^\circ$  thì  $I'(0; \sqrt{2})$ . Gọi  $I''$  là ảnh của  $I'$  qua phép vị tự tâm  $O$  tỉ số  $\sqrt{2}$  thì  $I''(0; 2)$ . Đường tròn cần tìm có tâm  $I''$  bán kính  $R = 2\sqrt{2}$  có phương trình là  $x^2 + (y - 2)^2 = 8$ .



4. Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$ ,  $AH$  là đường cao kẻ từ  $A$ . Tìm một phép đồng dạng biến tam giác  $HBA$  thành tam giác  $ABC$ .

*Giải*

Phép đối xứng qua đường phân giác của góc  $\widehat{ABC}$  biến tam giác  $HBA$  thành tam giác  $EBF$ . Phép vị tự tâm  $B$ , tỉ số  $\frac{AC}{AH}$  biến tam giác  $EBF$  thành tam giác  $ABC$ .



### C. BÀI TẬP LÀM THÊM

- Trong mặt phẳng Oxy cho đường thẳng  $d$  có phương trình  $x = 2\sqrt{2}$ . Hãy viết phương trình đường thẳng  $d'$  là ảnh của  $d$  qua phép đồng dạng có được bằng cách thực hiện liên tiếp phép vị tự tâm O tỉ số  $k = \frac{1}{2}$  và phép quay tâm O góc  $45^\circ$ .
- Trong mặt phẳng Oxy cho đường tròn (C) có phương trình  $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 4$ . Hãy viết phương trình đường tròn (C') là ảnh của (C) qua phép đồng dạng có được bằng cách thực hiện liên tiếp phép vị tự tâm O tỉ số  $k = -2$  và phép đối xứng qua trục Ox.

## BÀI TẬP ÔN TẬP CHƯƠNG I

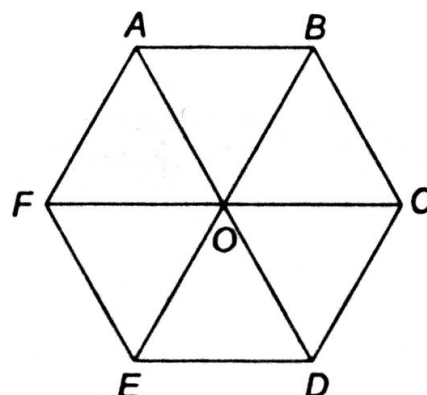
- Cho lục giác đều ABCDEF tâm O. Tìm ảnh của tam giác AOF

- Qua phép tịnh tiến theo vectơ  $\overrightarrow{AB}$ ;
- Qua phép đối xứng qua đường thẳng BE;
- Qua phép quay tâm O góc  $120^\circ$ .

*Giải*

- Ta có  $T_{\overrightarrow{AB}}: A \mapsto B$   
 $O \mapsto C$   
 $F \mapsto O$   
 Suy ra  $\triangle AOF \rightarrow \triangle BCO$

- $D_{BE}: A \mapsto C$   
 $F \mapsto D$   
 $O \mapsto O$   
 $\triangle AOF \rightarrow \triangle CDO$



- $Q_{(O, 120^\circ)}: A \mapsto E$   
 $F \mapsto D$   
 $\triangle AOF \rightarrow \triangle EOD$

- Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho điểm  $A(-1; 2)$  và đường thẳng  $d$  có phương trình  $3x + y + 1 = 0$ . Tìm ảnh của A và d
  - Qua phép tịnh tiến theo vectơ  $\vec{v} = (2; 1)$ ;
  - Qua phép đối xứng qua trục Oy;
  - Qua phép đối xứng qua gốc tọa độ;
  - Qua phép quay tâm O góc  $90^\circ$ .

### Giải

Gọi  $A'$  và  $d'$  lần lượt là ảnh của  $A$  và  $d$  qua các phép biến hình trên.

- a) Biểu thức tọa độ của phép tịnh tiến vectơ  $\vec{v} = (2; 1)$  là  $\begin{cases} x' = 2 + x \\ y' = 1 + y \end{cases}$

$A(-1; 2)$  nên  $A'(1; 3)$ .

$$M(x, y) \in d \Leftrightarrow 3x + y + 1 = 0 \Leftrightarrow 3(x' - 2) + (y' - 1) + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow 3x' + y' - 6 = 0 \Leftrightarrow M'(x'; y') \in d'$$

$d'$  có phương trình là:  $3x + y - 6 = 0$ .

- b) Biểu thức tọa độ của phép đối xứng qua trục  $Oy$  là  $\begin{cases} x' = -x \\ y' = y \end{cases}$

$A(-1; 2)$  nên  $A'(1, 2)$

$$M(x; y) \in d \Leftrightarrow 3x + y + 1 = 0 \Leftrightarrow -3x' + y' + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow 3x' - y' - 1 = 0 \Leftrightarrow M'(x'; y') \in d'$$

$d'$  có phương trình là  $3x - y - 1 = 0$ .

- c) Biểu thức tọa độ của phép đối xứng qua gốc tọa độ  $O$  là:  $\begin{cases} x' = -x \\ y' = -y \end{cases}$

$A' = (-1; 2)$ , nên  $A'(1; -2)$ .

$$M(x; y) \in d \Leftrightarrow 3x + y + 1 = 0 \Leftrightarrow -3x' - y' + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow 3x' + y' - 1 = 0 \Leftrightarrow M'(x'; y') \in d'$$

$d'$  có phương trình là:  $3x + y - 1 = 0$ .

- d) Qua phép quay tâm  $O$  góc  $90^\circ$ ,  $A$  biến thành  $A'(-2; -1)$ ,  $B(0, -1)$  biến thành  $B'(1; 0)$ . Vậy  $d'$  là đường thẳng  $A'B'$  có phương trình  $\frac{x-1}{-3} = \frac{y}{-1}$ ,

hay  $x - 3y - 1 = 0$ .

3. Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho đường tròn tâm  $I(3; -2)$ , bán kính 3.

- a) Viết phương trình của đường tròn đó.

- b) Viết phương trình ảnh của đường tròn  $(I; 3)$  qua phép tịnh tiến theo vectơ  $\vec{v} = (-2; 1)$ .

- c) Viết phương trình ảnh của đường tròn  $(I; 3)$  qua phép đối xứng qua trục  $Ox$ .

- d) Viết phương trình ảnh của đường tròn  $(I; 3)$  qua phép đối xứng qua gốc tọa độ.

*Giải*

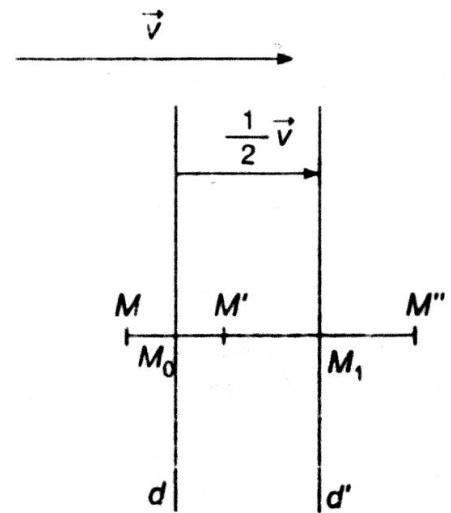
- a)  $(x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 9$ .
- b)  $T_{\vec{v}}(I) = I'(1; -1)$ , phương trình đường tròn ảnh:  $(x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 9$ .
- c)  $D_{O_X}(I) = I'(3; 2)$ , phương trình đường tròn ảnh:  $(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 9$ .
- d)  $D_O(I) = I'(-3; 2)$ , phương trình đường tròn ảnh:  $(x + 3)^2 + (y - 2)^2 = 9$ .
4. Cho vectơ  $\vec{v}$ , đường thẳng  $d$  vuông góc với  $\vec{v}$ . Gọi  $d'$  là ảnh của  $d$  qua phép tịnh tiến theo vectơ  $\frac{1}{2}\vec{v}$ . Chứng minh rằng phép tịnh tiến theo vectơ  $\vec{v}$  là kết quả của việc thực hiện liên tiếp phép đối xứng qua các đường thẳng  $d$  và  $d'$ .

*Giải*

Lấy  $M$  tùy ý. Gọi  $D_d(M) = M'$ ,  $D_{d'}(M') = M''$ . Gọi  $M_0, M_1$  là giao điểm của  $d$  và  $d'$  với  $MM''$ .

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } \overrightarrow{MM''} &= \overrightarrow{MM'} + \overrightarrow{M'M''} \\ &= 2\overrightarrow{M_0M'} + 2\overrightarrow{M'M_1} \\ &= 2\overrightarrow{M_0M_1} = 2 \cdot \frac{1}{2}\vec{v} = \vec{v}. \end{aligned}$$

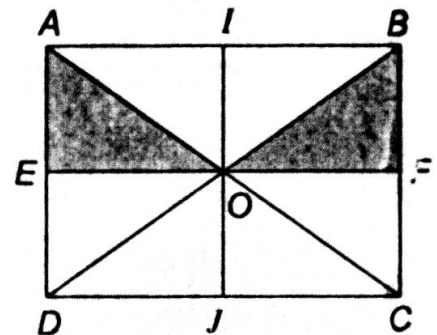
Vậy  $M'' = T_{\vec{v}}(M)$  là kết quả của việc thực hiện liên tiếp phép đối xứng qua các đường thẳng  $d$  và  $d'$ .



5. Cho hình chữ nhật ABCD. Gọi O là tâm đối xứng của nó. Gọi I, F, J, E lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC, CD, DA. Tìm ảnh của tam giác AEO qua phép đồng dạng có được từ việc thực hiện liên tiếp phép đối xứng qua đường thẳng IJ và phép vị tự tâm B, tỉ số 2.

*Giải*

Phép đối xứng qua đường thẳng IJ biến tam giác AEO thành tam giác BFO. Phép vị tự tâm B, tỉ số 2 biến tam giác BFO thành tam giác BCD. Vậy phép đồng dạng có được bằng cách thực hiện liên tiếp phép đối xứng qua đường thẳng IJ và phép vị tự tâm B tỉ số 2 biến tam giác AEO thành tam giác BCD.





6. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường tròn tâm I(1; -3), bán kính 2. Viết phương trình ảnh của đường tròn (I; 2) qua phép đồng dạng có được từ việc thực hiện liên tiếp phép vị tự tâm O tỉ số 3 và phép đối xứng qua trục Ox.

*Giải*

Gọi I' là ảnh của I qua phép vị tự  $V_{(0,3)}$  tâm O tỉ số 3.

Ta có  $V_{(0,3)}(I) = I'(3; -9)$

Gọi I'' là ảnh của I' qua phép đối xứng trục Ox.

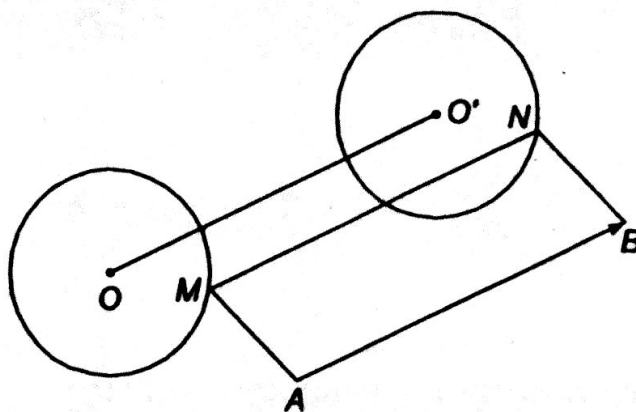
Ta có  $D_{Ox}(I') = I''(3; 9)$ .

Vậy đường tròn ảnh qua phép đồng dạng có tâm I''(3; 9) và bán kính  $R = 6$  nên có phương trình  $(x - 3)^2 + (y - 9)^2 = 36$ .

7. Cho hai điểm A, B và đường tròn tâm O không có điểm chung với đường thẳng AB. Qua mỗi điểm M chạy trên đường tròn (O) dựng hình bình hành MABN. Chứng minh rằng điểm N thuộc một đường tròn xác định.

*Giải*

Vì  $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AB}$  không đổi, nên có thể xem N là ảnh của M qua phép tịnh tiến theo  $\overrightarrow{AB}$ . Do đó khi M chạy trên đường tròn (O) thì N chạy trên đường tròn (O') là ảnh của (O) qua phép tịnh tiến theo  $\overrightarrow{AB}$ .



## CÂU HỎI TRAC NGHIỆM CHƯƠNG I

1. Trong các phép biến hình sau phép nào không phải là phép dời hình?

- (A) Phép chiếu vuông góc lên một đường thẳng. (B) Phép đồng nhất.  
(C) Phép vị tự tỉ số -1. (D) Phép đối xứng trục.

*Trả lời:* Phép chiếu vuông góc lên một đường thẳng không phải là phép dời hình. Chọn (A).

2. Trong các mệnh đề sau mệnh đề nào sai?

- (A) Phép tịnh tiến biến đường thẳng thành đường thẳng song song hoặc trùng với nó.
- (B) Phép đối xứng trục biến đường thẳng thành đường thẳng song song hoặc trùng với nó.
- (C) Phép đối xứng tâm biến đường thẳng thành đường thẳng song song hoặc trùng với nó.
- (D) Phép vị tự biến đường thẳng thành đường thẳng song song hoặc trùng với nó.

*Trả lời:* (A), (C) và (D) đúng. Chọn (B).

3. Trong mặt phẳng Oxy cho đường thẳng  $d$  có phương trình  $2x - y + 1 = 0$ . Để phép tịnh tiến theo vectơ  $\vec{v}$  biến  $d$  thành chính nó thì  $\vec{v}$  phải là vectơ nào trong các vectơ sau?

- (A)  $\vec{v} = (2; 1)$ ;      (B)  $\vec{v} = (2; -1)$ ;      (C)  $\vec{v} = (1; 2)$ ;      (D)  $\vec{v} = (-1; 2)$ .

*Trả lời:* Vectơ chỉ phương của  $d$  là  $\vec{u} = (1; 2)$ . Chọn (C).

4. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho  $\vec{v} = (2; -1)$  và điểm  $M(-3; 2)$ . Ảnh của điểm  $M$  qua phép tịnh tiến theo vectơ  $\vec{v}$  là điểm có tọa độ nào trong các tọa độ sau?

- (A)  $(5; 3)$ ;      (B)  $(1; 1)$ ;      (C)  $(-1; 1)$ ;      (D)  $(1; -1)$ .

*Trả lời:* Biểu thức tọa độ của phép tịnh tiến vectơ  $\vec{v} = (2, -1)$  là

$$\begin{cases} x' = 2 + x \\ y' = -1 + y \end{cases} \quad T_{\vec{v}} : M(-3, 2) \mapsto M'(-1; 1). \text{ Chọn (C).}$$

5. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho đường thẳng  $d$  có phương trình:  $3x - 2y + 1 = 0$ . Ảnh của đường thẳng  $d$  qua phép đối xứng trục Ox có phương trình là:

- (A)  $3x + 2y + 1 = 0$ ;      (B)  $-3x + 2y + 1 = 0$ ;
- (C)  $3x + 2y - 1 = 0$ ;      (D)  $3x - 2y + 1 = 0$ .

*Giải*

Biểu thức tọa độ của phép đối xứng trục Ox là  $\begin{cases} x' = x \\ y' = -y \end{cases}$

$$M(x; y) \in d \Leftrightarrow 3x - 2y + 1 = 0 \Leftrightarrow 3x' + 2y' + 1 = 0 \Leftrightarrow M' \in d'$$

$d'$  có phương trình:  $3x + 2y + 1 = 0$ . Chọn (A).

6. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho đường thẳng  $d$  có phương trình:  $3x - 2y - 1 = 0$ . Ảnh của đường thẳng  $d$  qua phép đối xứng tâm O có phương trình là:

(A)  $3x + 2y + 1 = 0$ ;

(B)  $-3x + 2y - 1 = 0$ ;

(C)  $3x + 2y - 1 = 0$ ;

(D)  $3x - 2y - 1 = 0$ .

**Trả lời:** Biểu thức tọa độ của phép đối xứng tâm O là  $\begin{cases} x' = -x \\ y' = -y \end{cases}$

$$M(x; y) \in d \Leftrightarrow 3x - 2y - 1 = 0 \Leftrightarrow -3x' + 2y' - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow 3x' - 2y' + 1 = 0 \Leftrightarrow M'(x'; y') \in d'$$

$d'$  có phương trình:  $3x - 2y + 1 = 0$ . Chọn (B).

7. Trong các mệnh đề sau mệnh đề nào sai?

(A) Có một phép tịnh tiến biến mọi điểm thành chính nó;

(B) Có một phép đối xứng trục biến mọi điểm thành chính nó;

(C) Có một phép quay biến mọi điểm thành chính nó;

(D) Có một phép vị tự biến mọi điểm thành chính nó.

**Trả lời:** (A), (C) và (D) đúng. Chọn (B).

8. Hình vuông có mấy trục đối xứng?

(A) 1;

(B) 2;

(C) 4;

(D) vô số.

**Trả lời:** Hình vuông có 4 trục đối xứng. Chọn (C).

9. Trong các hình sau hình nào có vô số tâm đối xứng?

(A) Hai đường thẳng cắt nhau.

(B) Đường elip.

(C) Hai đường thẳng song song.

(D) Hình lục giác đều.

**Trả lời:** Hai đường thẳng song song có vô số tâm đối xứng. Chọn (C).

10. Trong các mệnh đề sau mệnh đề nào sai?

(A) Hai đường thẳng bất kì luôn đồng dạng.

(B) Hai đường tròn bất kì luôn đồng dạng.

(C) Hai hình vuông bất kì luôn đồng dạng.

(D) Hai hình chữ nhật bất kì luôn đồng dạng.

**Trả lời:** (A), (B) và (C) đúng. Chọn (D).

# **Chương II. ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẪNG TRONG KHÔNG GIAN. QUAN HỆ SONG SONG**

## **§1. ĐẠI CƯƠNG VỀ ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẪNG**

### **A. KIẾN THỨC CƠ BẢN**

#### **1. Các tính chất**

*Tính chất 1:* Có một và chỉ một đường thẳng đi qua hai điểm phân biệt.

*Tính chất 2:* Có một và chỉ một mặt phẳng đi qua ba điểm không thẳng hàng.

*Tính chất 3:* Nếu một đường thẳng có hai điểm phân biệt thuộc một mặt phẳng thì mọi điểm của đường thẳng đều thuộc mặt phẳng đó.

*Tính chất 4:* Tồn tại bốn điểm không cùng thuộc một mặt phẳng.

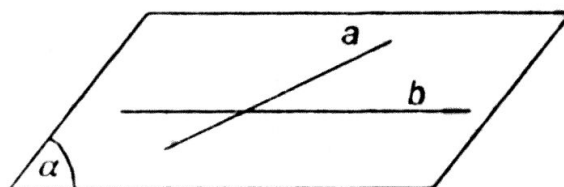
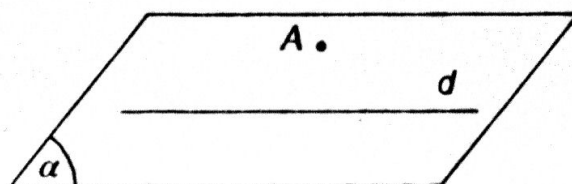
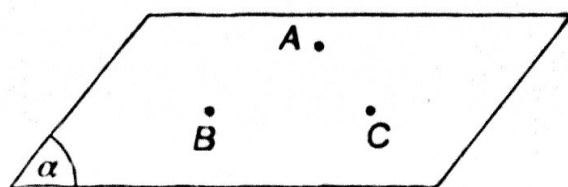
*Tính chất 5:* Nếu hai mặt phẳng phân biệt có một điểm chung thì chúng còn có một điểm chung khác nữa.

*Tính chất 6:* Trên mỗi mặt phẳng, các kết quả đã biết trong hình học phẳng đều đúng.

#### **2. Cách xác định một mặt phẳng**

Ba cách xác định mặt phẳng

- Mặt phẳng được hoàn toàn xác định khi biết nó đi qua ba điểm không thẳng hàng.
- Mặt phẳng được hoàn toàn xác định khi biết nó đi qua một điểm và chứa một đường thẳng không đi qua điểm đó.
- Mặt phẳng được hoàn toàn xác định khi biết nó chứa hai đường thẳng cắt nhau.

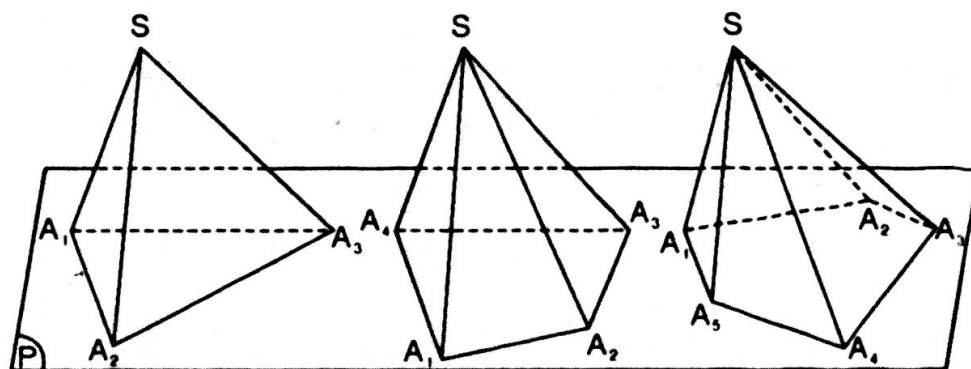


### 3. Hình chóp và hình tứ diện

#### a) Hình chóp

**Định nghĩa:** Cho đa giác lồi  $A_1A_2 \dots A_n$  và điểm  $S$  nằm ngoài mặt phẳng chứa đa giác đó. Nối  $S$  với các đỉnh  $A_1, A_2, \dots, A_n$  để được  $n$  tam giác  $SA_1A_2, SA_2A_3, \dots, SA_nA_1$ .

Hình gồm  $n$  đa giác đó và đa giác  $A_1A_2 \dots A_n$  gọi là hình chóp và được kí hiệu là  $S.A_1A_2 \dots A_n$ .



#### b) Hình tứ diện

**Định nghĩa:** Cho bốn điểm  $A, B, C, D$  không đồng phẳng. Hình gồm bốn tam giác  $ABC, ACD, ABD, BCD$  gọi là hình tứ diện (hay ngắn gọn là tứ diện) và được kí hiệu là  $ABCD$ . Thiết diện (hay mặt cắt) của hình  $\mathcal{H}$  khi cắt bởi  $mp(P)$  là phần chung của  $mp(P)$  và hình  $\mathcal{H}$ .

## B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

1. Cho điểm  $A$  không nằm trên mặt phẳng  $(\alpha)$  chứa tam giác  $BCD$ . Lấy  $E, F$  là các điểm lần lượt nằm trên các cạnh  $AB, AC$ .

a) Chứng minh đường thẳng  $EF$  nằm trong mặt phẳng  $(ABC)$ .

b) Khi  $EF$  và  $BC$  cắt nhau tại  $I$ , chứng minh  $I$  là điểm chung của hai mặt phẳng  $(BCD)$  và  $(DEF)$ .

*Giải*

a) Ta có:  $E \in AB$  nên  $E \in (ABC)$

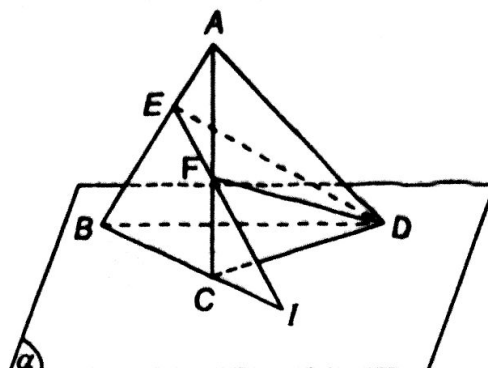
$F \in AC$  nên  $F \in (ABC)$ .

Suy ra  $EF$  nằm trong  $(ABC)$ .

b)  $I \in BC \Rightarrow I \in (BCD)$ .

$I \in EF \Rightarrow I \in (DEF)$ .

Vậy  $I \in (BCD) \cap (DEF)$ .



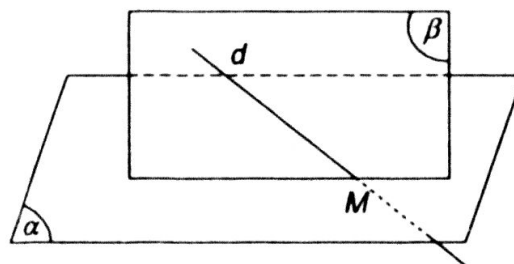
2. Gọi  $M$  là giao điểm của đường thẳng  $d$  và mặt phẳng  $(\alpha)$ . Chứng minh  $M$  là điểm chung của  $(\alpha)$  với một mặt phẳng bất kì chứa  $d$ .

*Giải*

Hiển nhiên  $M \in (\alpha)$ . Gọi  $(\beta)$  là mặt phẳng bất kì chứa  $d$ , ta có

$$\begin{cases} M \in d \\ d \subset (\beta) \end{cases} \Rightarrow M \in (\beta).$$

Vậy  $M$  là điểm chung của  $(\alpha)$  và mọi mặt phẳng  $(\beta)$  chứa  $d$ .



3. Cho ba đường thẳng  $d_1, d_2, d_3$  không cùng nằm trong một mặt phẳng và cắt nhau từng đôi một. Chứng minh ba đường thẳng trên đồng quy.

*Giải*

Giả sử  $I = d_1 \cap d_2$ . Ta chứng minh  $I \in d_3$ .

Nếu  $d_3$  không đi qua  $I$  thì  $d_3$  cắt  $d_1$  và  $d_2$  lần lượt tại  $J$  và  $K$  (khác  $I$ ).

$I, J, K$  không thẳng hàng nên tạo thành mặt phẳng  $(IJK)$ . Khi đó  $d_1, d_2, d_3$  nằm trong  $(IJK)$  (vô lí). Vậy  $d_3$  đi qua  $I$  tức  $d_1, d_2, d_3$  đồng quy.

4. Cho bốn điểm  $A, B, C$  và  $D$  không đồng phẳng. Gọi  $G_A, G_B, G_C, G_D$  lần lượt là trọng tâm của các tam giác  $BCD, CDA, ABD, ABC$ . Chứng minh rằng  $AG_A, BG_B, CG_C, DG_D$  đồng quy.

*Giải*

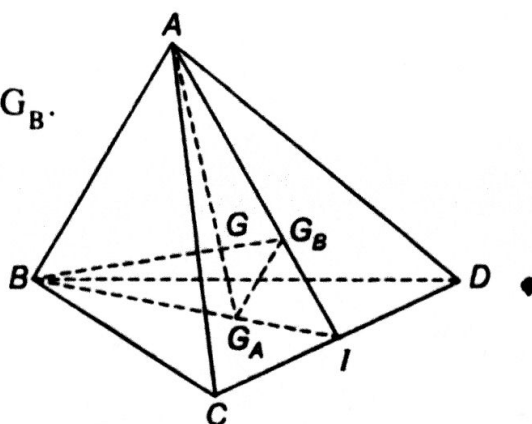
Gọi  $I$  là trung điểm của  $CD$ .

Ta có:  $G_A \in BI, G_B \in AI$ . Gọi  $G = AG_A \cap BG_B$ .

Ta có:  $\triangle IG_A G_B \sim \triangle IBA$

vì  $\frac{IG_A}{IB} = \frac{IG_B}{IA} = \frac{1}{3}$  nên  $G_A G_B \parallel AB$

và  $\frac{GA}{GG_A} = \frac{AB}{G_A G_B} = 3$ .



Lí luận tương tự, ta có  $CG_C, DG_D$  cũng cắt  $AG_A$  tại  $G', G''$

và  $\frac{G'A}{G'G_A} = 3, \frac{G''A}{G''G_A} = 3$ .

Như vậy  $G \equiv G' \equiv G''$

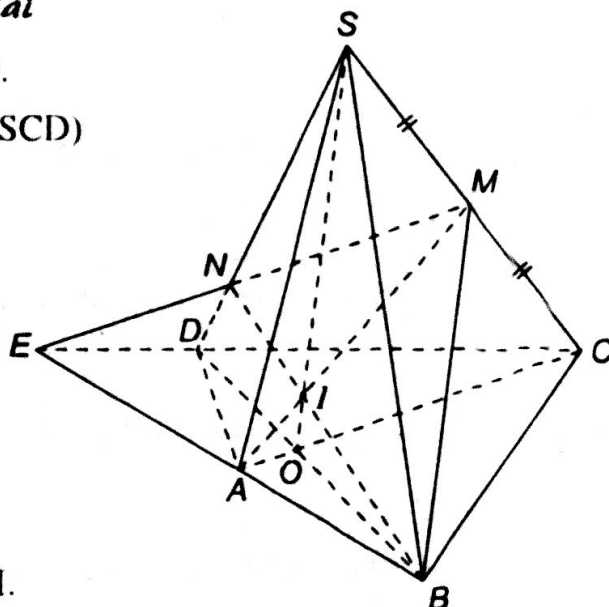
*Ghi chú:* Ta gọi  $AG_A, BG_B, CG_C$  và  $DG_D$  là các đường trung tuyến và  $G$  là trọng tâm của tứ diện  $ABCD$ .



5. Cho tứ giác ABCD nằm trong mặt phẳng  $(\alpha)$  có hai cạnh AB và CD không song song. Gọi S là điểm nằm ngoài mặt phẳng  $(\alpha)$  và M là trung điểm đoạn SC.
- Tìm giao điểm N của đường thẳng SD và mặt phẳng (MAB).
  - Gọi O là giao điểm của AC và BD. Chứng minh rằng ba đường thẳng SO, AM, BN đồng quy.

*Giải*

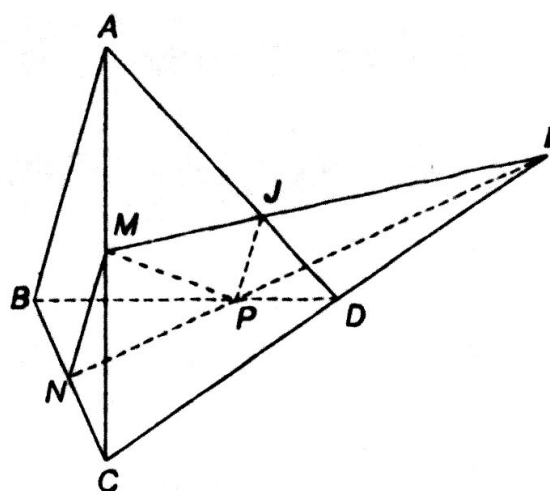
- Gọi E là giao điểm của AB và CD.  
Chọn mặt phẳng phụ chứa SD là (SCD)  
 $(MAB) \cap (SCD) = ME$ .  
Gọi N là giao điểm ME với SD thì N là giao điểm của SD với mp(MAB).
- Gọi  $I = AM \cap BN$ .  
 $AM \subset (SAC); BN \subset (SBD)$   
 $\Rightarrow I \in (SAC) \cap (SBD) = SO$ .  
Vậy AM, BN và SO đồng quy tại I.



6. Cho bốn điểm A, B, C và D không đồng phẳng. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AC và BC. Trên đoạn BD lấy điểm P sao cho  $BP = 2PD$ .
- Tìm giao điểm của đường thẳng CD và mặt phẳng (MNP).
  - Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (MNP) và (ACD).

*Giải*

- Giao điểm của CD với mp(MNP)  
Ta có NP không là đường trung bình của tam giác BCD nên NP cắt CD tại I.  
 $I \in CD$  và  $I \in (MNP)$   
nên  $\{I\} = CD \cap (MNP)$
- Giao tuyến của (MNP) và (ACD)  
Ta có M và I là hai điểm chung phân biệt của hai mặt phẳng (MNP) và (ACD) nên:  $(MNP) \cap (ACD) = MI$



7. Cho bốn điểm A, B, C và D không đồng phẳng. Gọi I, K lần lượt là trung điểm của hai đoạn thẳng AD và BC.

- Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (IBC) và (KAD).
- Gọi M và N là hai điểm lần lượt lấy trên hai đoạn thẳng AB và AC. Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (IBC) và (DMN).

*Giải*

- Giao tuyến của hai mặt phẳng (IBC) và (KAD).

Ta có  $I \in AD \Rightarrow I \in (KAD) \Rightarrow I \in (KAD) \cap (IBC)$

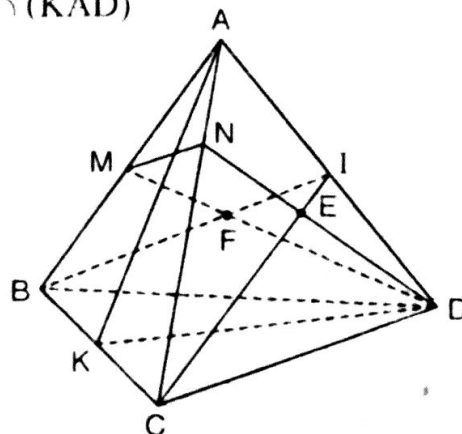
$K \in BC \Rightarrow K \in (IBC) \Rightarrow K \in (IBC) \cap (KAD)$

Vậy  $(IBC) \cap (KAD) = IK$ .

- Giao tuyến của hai mặt phẳng (IBC) và (DMN).

Trong mp(ACD) gọi  $\{E\} = CI \cap DN$  và trong mp(ABD) gọi  $\{F\} = BI \cap DM$ .

E, F là hai điểm chung phân biệt của hai mặt phẳng (IBC) và (DMN) nên  $(IBC) \cap (DMN) = EF$ .



8. Cho tứ diện ABCD. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB và CD, trên cạnh AD lấy điểm P không trùng với trung điểm của AD.

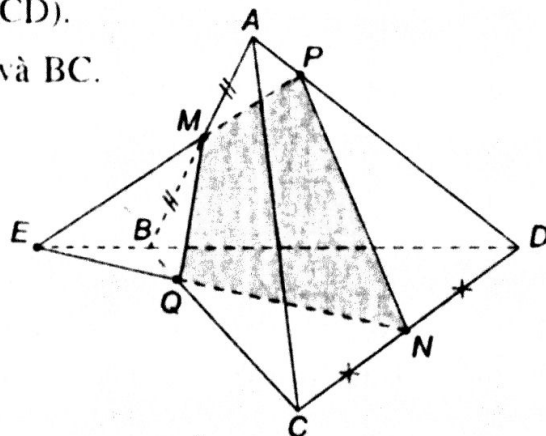
- Gọi E là giao điểm của đường thẳng MP và đường thẳng BD. Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (PMN) và (BCD).
- Tìm giao điểm của mặt phẳng (PMN) và BC.

*Giải*

- Ta có  $E, N \in (MNP) \cap (BCD)$

$\Rightarrow (MNP) \cap (BCD) = EN$ .

- Gọi Q là giao điểm của NE và BC thì Q là giao điểm của (PMN) và BC.

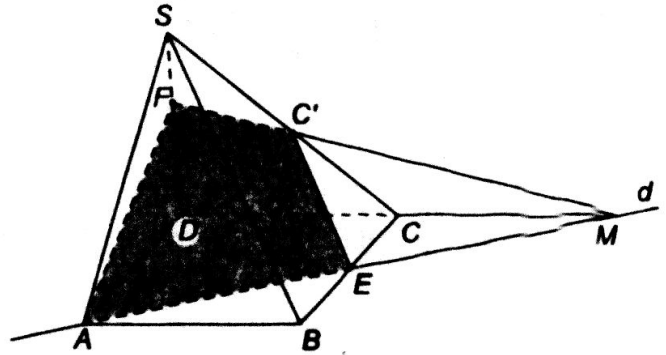


9. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình bình hành ABCD. Trong mặt phẳng đáy vẽ đường thẳng d đi qua A và không song song với các cạnh của hình bình hành, d cắt đoạn BC tại E. Gọi C' là một điểm nằm trên cạnh SC.

- Tìm giao điểm M của CD và mặt phẳng (C'AE).
- Tìm thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng (C'AE).

*Giải*

- Gọi M là giao điểm của AE và DC thì M là giao điểm của CD và (C'AE).
- Gọi F là giao điểm của MC' với SD. Thiết diện cần tìm là tứ giác AEC'F.

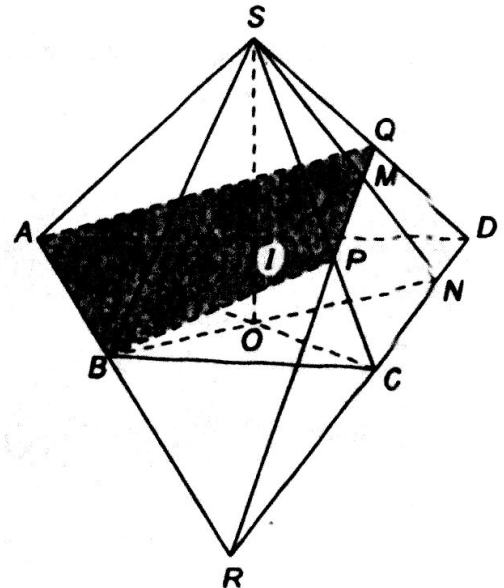


10. Cho hình chóp S.ABCD có AB và CD không song song. Gọi M là một điểm thuộc miền trong của tam giác SCD.

- Tìm giao điểm N của đường thẳng CD và mặt phẳng (SBM).
- Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (SBM) và (SAC).
- Tìm giao điểm I của đường thẳng BM và mặt phẳng (SAC).
- Tìm giao điểm P của SC và mặt phẳng (ABM), từ đó suy ra giao tuyến của hai mặt phẳng (SCD) và (ABM).

*Giải*

- Gọi N là giao điểm của SM và CD thì N là giao điểm của CD và mp(SBM).
- Gọi  $O = AC \cap BN$  thì ta có:  
 $(SBM) \cap (SAC) = SO$ .
- Gọi  $I = SO \cap BM$  thì I là giao điểm của BM với mặt phẳng (SAC).
- Gọi  $R = AB \cap CD$ ,  $P = MR \cap SC$  thì P là giao điểm của SC với mp(ABM) và  $(SCD) \cap (AMB) = PM$ .

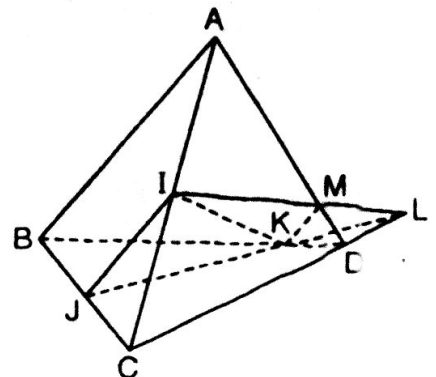


### C. BÀI TẬP LÀM THÊM

- Cho tứ diện ABCD. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AC và BC. K là một điểm trên cạnh BD sao cho  $KD < KB$ . Tìm giao tuyến của mặt phẳng (IJK) với hai mặt phẳng (ACD) và (ABD).

*Hướng dẫn*

- Gọi L là giao điểm của JK và CD.  
Ta có:  $(IJK) \cap (ACD) = IL$
- Gọi M là giao điểm của AD và IL.  
Ta có:  $(IJK) \cap (ABD) = KM$



2. Cho tứ diện ABCD, M là một điểm bên trong tam giác ABD, N là một điểm bên trong tam giác ACD. Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng.

a) (AMN) và (BCD);

b) (DMN) và (ABC)

**Hướng dẫn**

- a) Giao tuyến của (AMN) và (BCD)

Gọi I là giao điểm của AM và BD.

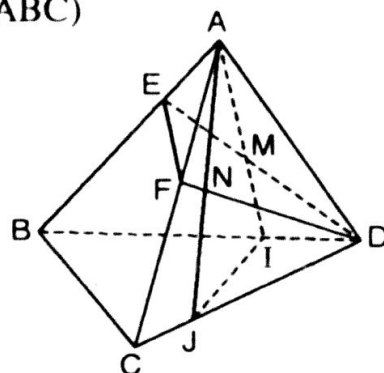
J là giao điểm của AN và CD.

Ta có:  $(AMN) \cap (BCD) = IJ$

- b) Giao tuyến của (DMN) và (ABC)

Gọi E là giao điểm của DM và AB, F là giao điểm của DN và AC.

Ta có:  $(DMN) \cap (ABC) = EF$



3. Cho tứ diện ABCD, M và N là hai điểm lần lượt trên AC và AD. O là điểm bên trong tam giác BCD. Tìm giao điểm của:

a) MN và (ABO);

b) AO và (BMN)

**Hướng dẫn**

- a) Tìm giao điểm MN và (ABO)

Chọn mặt phẳng phụ chứa MN là (ACD)

$(ACD) \cap (ABO) = AI$  với I là giao điểm của 2 đường thẳng BO và CD.

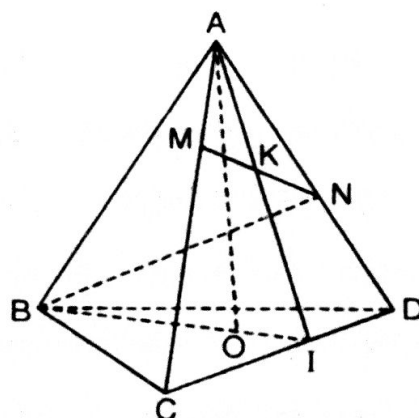
Gọi K là giao điểm của AI và MN thì K là giao điểm của MN và (ABO)

- b) Tìm giao điểm AO và (BMN)

Chọn mặt phẳng phụ chứa AO là (ABI)

$(ABI) \cap (BMN) = BK$

Gọi L là giao điểm của BK và AO thì L là giao điểm của AO và (BMN)



4. Cho hình chóp S.ABCD đáy là hình thang, đáy lớn là AB. Gọi I, J, K là 3 điểm trên SA, AB, BC theo thứ tự đó.

a) Tìm giao điểm IK với (SBD)

b) Tìm các giao điểm của mp(IJK) với SD và SC.

**Hướng dẫn**

- a) Tìm giao điểm IK và (SBD)

Cho mặt phẳng phụ chứa IK là (SKA)

$(SKA) \cap (SBD) = SO$  với O là giao điểm của AK và BD

Gọi M là giao điểm của SO và IK thì

M là giao điểm của IK và (SBD)

b) Tìm giao điểm SD và (IJK)

Chọn mặt phẳng phụ chứa SD là (SBD)

$(SBD) \cap (IJK) = MN$  với N là giao điểm của JK và BD

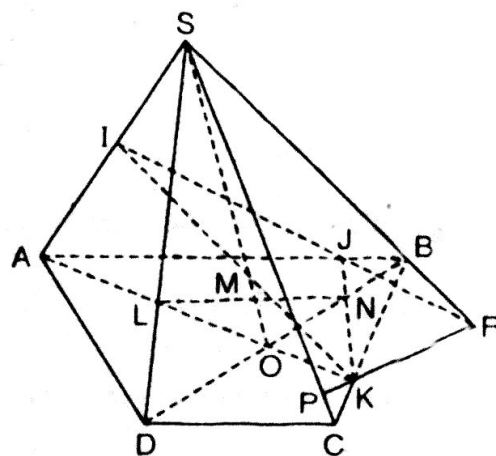
Gọi L là giao điểm của MN và SD thì L là giao điểm của SD và (IJK)

c) Chọn giao điểm SC và (IJK)

Chọn mặt phẳng phụ thuộc chứa SC là (SBC).

$(SBC) \cap (IJK) = KR$  với R là giao điểm của 2 đường thẳng IJ và SB.

Gọi P là giao điểm của KR và SC thì P là giao điểm của SC và (IJK).



## §2. HAI ĐƯỜNG THẲNG CHÉO NHAU VÀ HAI ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG

### A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

#### 1. Vị trí tương đối của hai đường thẳng trong không gian

a) *Trường hợp 1.* Có một mặt phẳng chứa a và b, ta nói a và b là đồng phẳng. Có ba khả năng sau: \*

\* a và b cắt nhau tại M

\* a song song với b

\* a trùng với b

b) *Trường hợp 2.* a và b chéo nhau.

#### 2. Tính chất

a) *Định lý 1:* Trong không gian, qua một điểm không nằm trên đường thẳng cho trước, có một và chỉ một đường thẳng song song với đường thẳng đã cho.

b) *Định lý 2* (Về giao tuyến của ba mặt phẳng)

Nếu ba mặt phẳng phân biệt đôi một cắt nhau theo ba giao tuyến phân biệt thì ba giao tuyến ấy hoặc đồng quy hoặc đôi một song song với nhau.

c) *Hệ quả:* Nếu hai mặt phẳng phân biệt lần lượt chứa hai đường thẳng song song thì giao tuyến của chúng (nếu có) cũng song song với hai đường thẳng đó hoặc trùng với một trong hai đường thẳng đó.

d) *Định lý 3:* Hai đường thẳng phân biệt cùng song song với đường thẳng thứ ba thì song song với nhau.

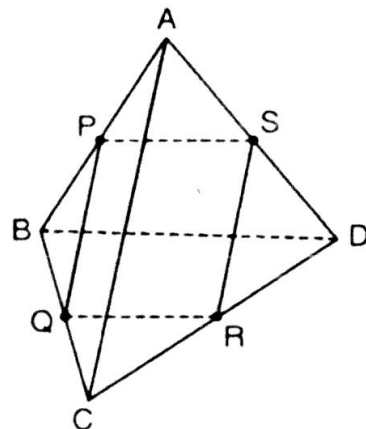
## B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

1. Cho tứ diện ABCD. Gọi P, Q, R và S là bốn điểm lần lượt lấy trên bốn cạnh AB, BC, CD và DA. Chứng minh rằng nếu bốn điểm P, Q, R và S đồng phẳng thì

- Ba đường thẳng PQ, SR và AC hoặc song song hoặc đồng quy;
- Ba đường thẳng PS, RQ và BD hoặc song song hoặc đồng quy.

*Giải*

- Gọi  $(\alpha)$  là mặt phẳng chứa P, Q, R và S.  
Ba mặt phẳng  $(\alpha)$ ,  $(DAC)$ ,  $(BAC)$  đôi một cắt nhau theo các giao tuyến là SR, PQ và AC. Như vậy SR, QP và AC hoặc đôi một song song hoặc đồng quy.
- Lí luận tương tự câu a, ta có PS, RQ, và BD đôi một song song hoặc đồng quy.

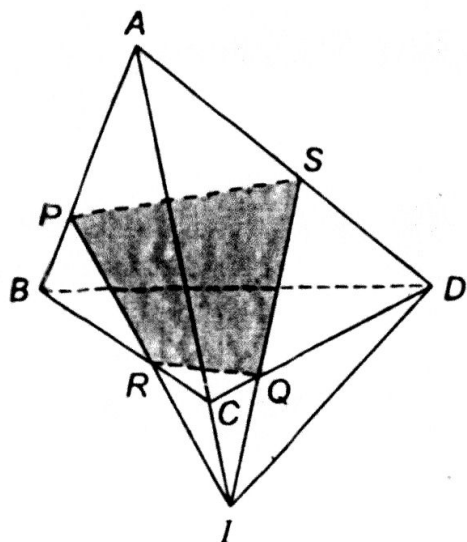
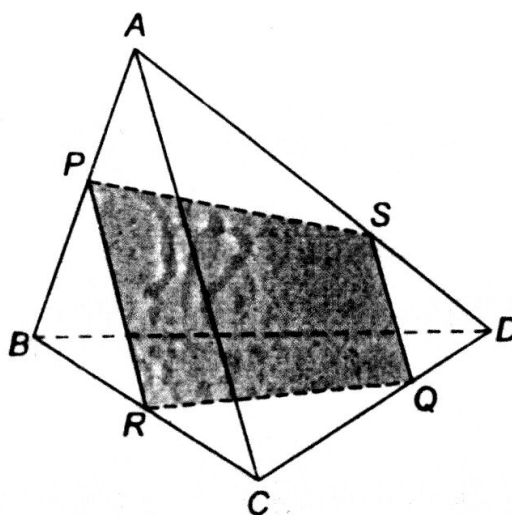


2. Cho tứ diện ABCD và ba điểm P, Q, R lần lượt lấy trên ba cạnh AB, CD, BC. Tìm giao điểm S của AD và mặt phẳng (PQR) trong hai trường hợp sau đây.

- PR song song với AC;
- PR cắt AC.

*Giải*

- Nếu  $PR \parallel AC$  thì  $QS \parallel AC$  với  $S = (PQR) \cap AD$ .  
Vậy S là giao điểm của đường thẳng qua Q song song với AC và đường thẳng AD.



- Gọi  $I = PR \cap AC$ .  
Ta có  $(PQR) \cap (ACD) = IQ$ .  
Gọi  $S = IQ \cap AD$ , ta có  $S = AD \cap (PQR)$ .



3. Cho tứ diện ABCD. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, CD và G là trung điểm của đoạn MN.
- Tìm giao điểm A' của đường thẳng AG và mặt phẳng (BCD);
  - Qua M kẻ đường thẳng Mx song song với AA' và Mx cắt (BCD) tại M'. Chứng minh B, M', A' thẳng hàng và  $BM' = M'A' = A'N$ ;
  - Chứng minh  $GA = 3GA'$ .

*Giải*

- Gọi A' là giao điểm của BN và AG thì A' là giao điểm của AG và mp(BCD).
- $$\begin{cases} AA' \subset (ABN) \\ MM' \parallel AA' \end{cases} \Rightarrow MM' \subset (ABN).$$

Ta có B, M', A' là điểm chung của hai mặt phẳng (ABN) và (BCD) nên B, M', A' thẳng hàng.

Trong tam giác NMM', ta có:

$$\begin{cases} G \text{ là trung điểm NM} \\ GA' \parallel MM' \end{cases}$$

$\Rightarrow A'$  là trung điểm NM'.

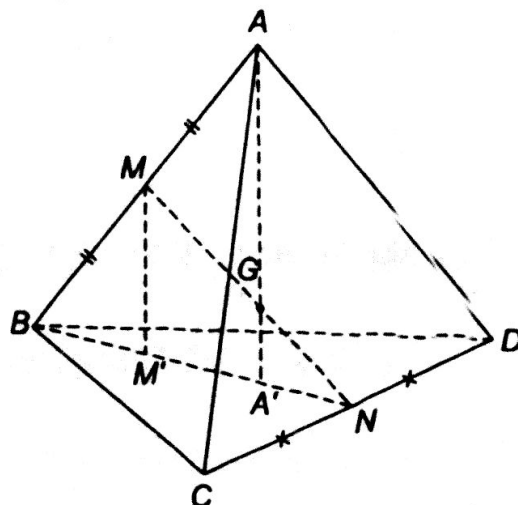
Tương tự trong tam giác BAA', ta có:

$$\begin{cases} M \text{ là trung điểm BA} \\ MM' \parallel AA' \end{cases}$$

$\Rightarrow M'$  là trung điểm BA'.

Vậy  $BM' = M'A' = A'N$ .

$$\text{c) Ta có } \begin{cases} GA' = \frac{1}{2}MM' \\ MM' = \frac{1}{2}AA' \end{cases} \Rightarrow GA' = \frac{1}{4}AA' \Rightarrow GA = 3GA'$$



### C. BÀI TẬP LÀM THÊM

- Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình bình hành. Gọi H và K lần lượt là trung điểm của SA và SB.
  - Chứng minh  $HK \parallel CD$ .
  - Gọi M là điểm trên cạnh SC không trùng S. Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (HKM) và (SCD).
  - Tìm giao tuyến hai mặt phẳng (SAB) và (SCD).

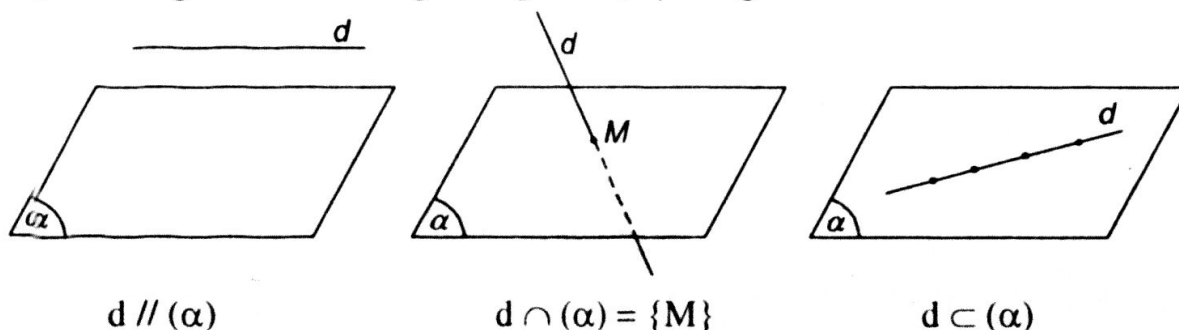
2. Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình thang với các cạnh đáy là  $AB$  và  $CD$ . Gọi  $I, J$  lần lượt là trung điểm của  $AD$  và  $BC$ . Gọi  $K$  là điểm trên cạnh  $SB$  sao cho  $SK = \frac{2}{3} SB$ .

- Tìm giao tuyến của  $(SAB)$  và  $(IJK)$ .
- Xác định thiết diện của hình chóp bởi  $mp(IJK)$ . Tìm điều kiện đối với  $AB$  và  $CD$  để thiết diện là hình bình hành.

## §3. ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẪNG SONG SONG

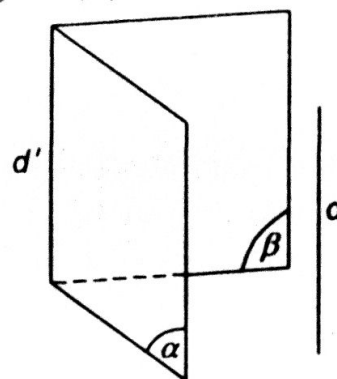
### A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

#### 1. Vị trí tương đối của đường thẳng và mặt phẳng



#### 2. Tính chất

- Định lý 1:** Nếu đường thẳng  $d$  không nằm trong mặt phẳng  $(\alpha)$  và  $d$  song song với đường thẳng  $d'$  nằm trong  $(\alpha)$  thì  $d$  song song với  $(\alpha)$ .
- Định lý 2:** Cho đường thẳng  $a$  song song với mặt phẳng  $(\alpha)$ . Nếu mặt phẳng  $(\beta)$  chứa  $a$  và cắt  $(\alpha)$  theo giao tuyến  $b$  thì  $b$  song song với  $a$ .
- Hệ quả:** Nếu hai mặt phẳng phân biệt cùng song song với một đường thẳng thì giao tuyến của chúng (nếu có) cũng song song với đường thẳng đó.
- Định lý 3:** Cho hai đường thẳng chéo nhau. Có duy nhất một mặt phẳng chứa đường thẳng này và song song với đường thẳng kia.



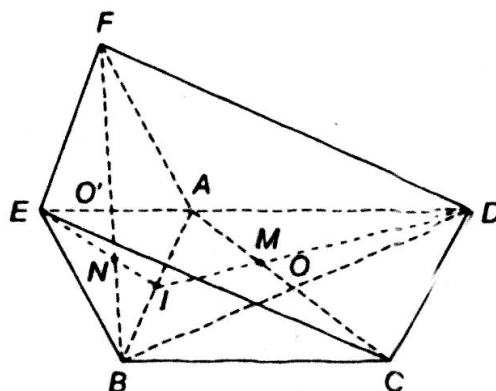
### B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

- Cho hai hình bình hành  $ABCD$  và  $ABEF$  không cùng nằm trong một mặt phẳng.
  - Gọi  $O$  và  $O'$  lần lượt là tâm của các hình bình hành  $ABCD$  và  $ABEF$ . Chứng minh rằng đường thẳng  $OO'$  song song với các mặt phẳng  $(ADF)$  và  $(BCE)$ .

- b) Gọi M và N lần lượt là trọng tâm của hai tam giác ABD và ABE. Chứng minh đường thẳng MN song song với mặt phẳng (CEF).

*Giải*

- a) Ta có  $OO'$  là đường trung bình của tam giác BDF nên  $OO' \parallel DF$ , mà  $DF \subset (ADF)$  nên  $OO' \parallel (ADF)$ .  
Tương tự  $OO' \parallel CE$  và  $CE \subset (BCE)$  nên  $OO' \parallel (BCE)$ .
- b) Tứ giác EFDC là hình bình hành, suy ra  $ED \subset (CEF)$ . Gọi I là trung điểm của AB ta có  $\frac{IM}{ID} = \frac{IN}{IE} = \frac{1}{3}$  suy ra  $MN \parallel ED$ .

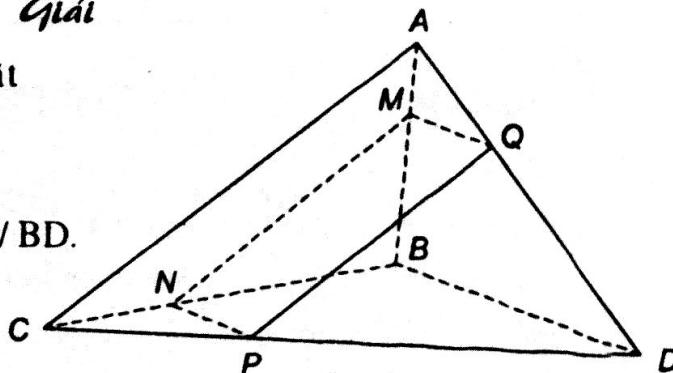


Ta lại có  $ED \subset (CEF) \Rightarrow MN \parallel (CEF)$ .

2. Cho tứ diện ABCD. Trên cạnh AB lấy một điểm M. Cho  $(\alpha)$  là mặt phẳng qua M, song song với hai đường thẳng AC và BD.
- a) Tìm giao tuyến của  $(\alpha)$  với các mặt của tứ diện.
- b) Thiết diện của tứ diện cắt bởi mặt phẳng  $(\alpha)$  là hình gì?

*Giải*

- a) Giao tuyến của  $(\alpha)$  với các mặt của tứ diện là các cạnh của tứ giác MNPQ có:  
 $MN \parallel PQ \parallel AC$  và  $MQ \parallel NP \parallel BD$ .
- b) Thiết diện tạo bởi mặt phẳng  $(\alpha)$  với tứ diện là hình bình hành.

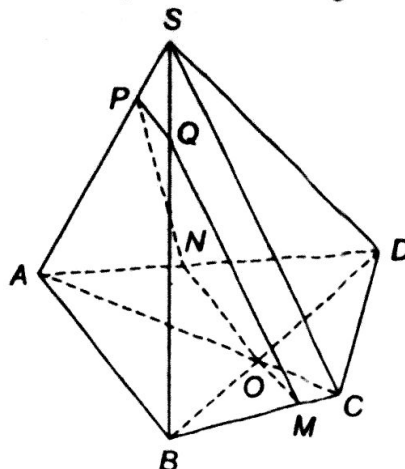


3. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là một tứ giác lồi. Gọi O là giao điểm của hai đường chéo AC và BD. Xác định thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng  $(\alpha)$  đi qua O, song song với AB và SC. Thiết diện đó là hình gì?

*Giải*

Ta có 
$$\begin{cases} (\alpha) \parallel AB \\ AB \subset (ABCD) \\ MN = (\alpha) \cap (ABCD) \end{cases} \Rightarrow AB \parallel MN$$

Tương tự 
$$\begin{cases} (\alpha) \parallel SC \\ SC \subset (SBC) \\ MQ = (\alpha) \cap (SBC) \end{cases} \Rightarrow SC \parallel MQ.$$



$$\text{và} \quad \begin{cases} (\alpha) // AB \\ AB \subset (SAB) \\ PQ = (\alpha) \cap (SAB) \end{cases} \Rightarrow AB // PQ$$

Vậy  $MN // PQ$ . Do đó tứ giác  $MNPQ$  là hình thang.

### C. BÀI TẬP LÀM THÊM

1. Trong mặt phẳng  $(\alpha)$  cho  $\Delta ABC$  vuông tại  $A$ ,  $B = 60^\circ$ ,  $AB = a$ . Gọi  $O$  là trung điểm của  $BC$ . Lấy  $S$  ở ngoài  $(\alpha)$  sao cho  $SB = a$  và  $SB \perp OA$ . Gọi  $M$  là một điểm trên cạnh  $AB$ , mặt phẳng  $(\beta)$  qua  $M$  và song song với  $SB$  và  $OA$  cắt  $BC, SC, SA$  lần lượt tại  $N, P, Q$ . Đặt  $x = BM$  ( $0 < x < a$ ).

- a) Chứng minh  $MNPQ$  là hình thang vuông.  
b) Tính theo  $a$  và  $x$  diện tích của hình thang này. Tính  $x$  để diện tích này lớn nhất.

#### Hướng dẫn

- a)  $MNPQ$  là hình thang vuông.

Vì  $(\alpha) // SB$  nên  $(\alpha)$  cắt 2 mặt phẳng chứa  $SB$  là  $(SAB)$  và  $(SBC)$  lần lượt theo hai giao tuyến  $MQ$  và  $NP$  song song với  $BC$  nên  $MNPQ$  là hình thang.

Vì  $(\alpha) // OA$  nên  $(\alpha)$  cắt  $(ABC)$  theo giao tuyến  $MN // OA$ .

Theo giả thiết  $SB \perp OA$  nên  $QM \perp MN$ .

Vậy  $MNPQ$  là hình thang vuông tại  $M$ .

b)  $S_{MNPQ} = \frac{1}{2} (MQ + NP) \cdot MN$

Ta có:  $\frac{MQ}{SB} = \frac{AM}{AB} \Rightarrow MQ = a - x$

Ta có:  $\frac{NP}{SB} = \frac{CN}{CB} \Rightarrow NP = \frac{2a - x}{2}$

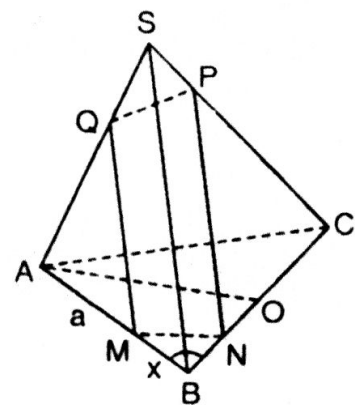
Vậy  $S_{MNPQ} = \frac{x(4a - 3x)}{4}$ . Ta có:  $S_{MNPQ} = \frac{3x(4a - 3x)}{12}$ .

$3x$  và  $4a - 3x$  có tổng bằng  $4a$  (hằng số) nên tích  $3x(4a - 3x)$  lớn nhất khi

$3x = 4a - 3x$  hay  $x = \frac{2a}{3}$ .

2. Cho tứ diện  $ABCD$  có  $AB = a$ ,  $CD = b$ . Đoạn  $IJ$  nối trung điểm  $I$  của  $AB$  và trung điểm  $J$  của  $CD$ . Giả sử  $AB \perp CD$ ,  $(\alpha)$  là mặt phẳng qua  $M$  trên đoạn  $IJ$  và song song với  $AB$  và  $CD$ .

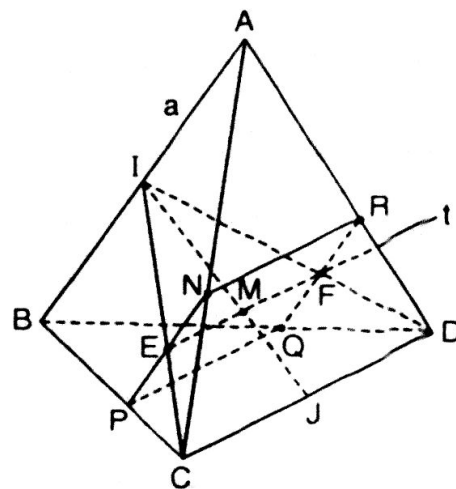
- a) Tìm giao tuyến của  $(\alpha)$  với mặt phẳng  $(ICD)$ .



- b) Xác định thiết diện của ABCD với mặt phẳng  $(\alpha)$ . Chứng minh thiết diện là hình chữ nhật.
- c) Tính diện tích hình chữ nhật, biết  $IM = \frac{1}{3} IJ$ .

**Hướng dẫn**

- a) Xác định  $(\alpha) \cap (ICD)$   
 $(\alpha) \cap (ICD)$  có điểm chung M và  $CD \parallel (\alpha)$  nên  $(\alpha)$  cắt  $(ICD)$  theo giao tuyến Mt qua M và song song CD.
- b) Gọi E, F lần lượt giao điểm của Mt với CI và DI.  
 Qua E kẻ  $NP \parallel AB$ , qua F kẻ  $QR \parallel AB$ . Thiết diện là hình chữ nhật PQRN. Vì có  $NP \parallel QR$ ,  $PQ \parallel NR$  và  $NP \perp PQ$  (do  $AB \perp CD$ ).



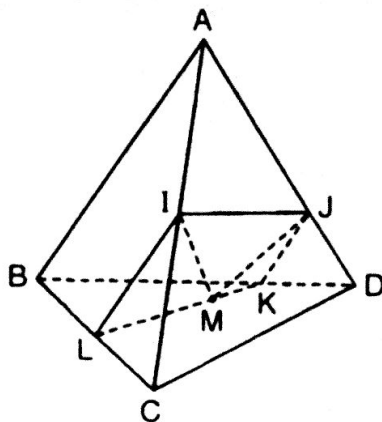
c)  $S_{PQRN} = \frac{2ab}{9}$ .

3. Cho tứ diện đều ABCD cạnh a, I là trung điểm của AC, J là một điểm trên cạnh AD sao cho  $AJ = 2JD$ . M là một điểm di động trong  $\triangle BCD$ , mặt phẳng (MIJ) luôn luôn song song với AB.

- a) Tìm tập hợp điểm M.  
 b) Tính diện tích thiết diện của tứ diện ABCD với mặt phẳng (MIJ).

**Hướng dẫn**

- a) Gọi L là trung điểm của BC, K là điểm trên BD sao cho  $BK = 2KD$ .  
 Tập hợp điểm M là đoạn KL.
- b) Thiết diện cần tìm là hình thang IJKL.



## §4. HAI MẶT PHẪNG SONG SONG

### A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

#### 1. Định nghĩa

Hai mặt phẳng  $(\alpha)$ ,  $(\beta)$  được gọi là song song với nhau nếu chúng không có điểm chung.

Khi đó ta kí hiệu  $(\alpha) // (\beta)$  hay  $(\beta) // (\alpha)$ .

#### 2. Tính chất

a) *Định lí 1:* Nếu mặt phẳng  $(\alpha)$  chứa hai đường thẳng cắt nhau  $a$ ,  $b$  và  $a$ ,  $b$  cùng song song với mặt phẳng  $(\beta)$  thì  $(\alpha)$  song song với  $(\beta)$ .

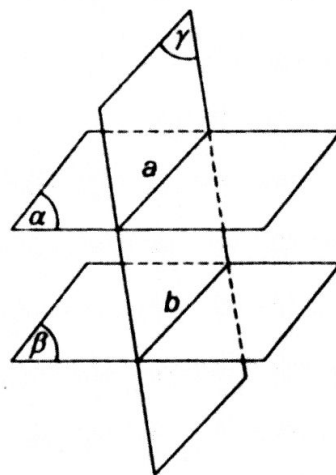
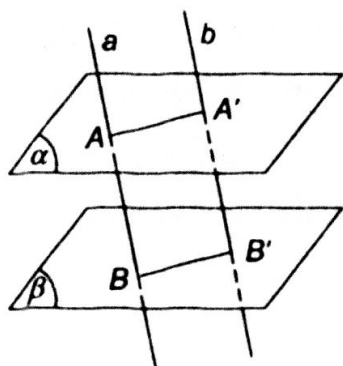
b) *Định lí 2:* Qua một điểm nằm ngoài một mặt phẳng cho trước có một và chỉ một mặt phẳng song song với mặt phẳng đã cho.

c) *Hệ quả 1:* Nếu đường thẳng  $d$  song song với mặt phẳng  $(\alpha)$  thì qua  $d$  có duy nhất một mặt phẳng song song với  $(\alpha)$ .

d) *Hệ quả 2:* Hai mặt phẳng phân biệt cùng song song với mặt phẳng thứ ba thì song song với nhau.

e) *Hệ quả 3:* Cho điểm  $A$  không nằm trên mặt phẳng  $(\alpha)$ . Mọi đường thẳng đi qua  $A$  và song song với  $(\alpha)$  đều nằm trong một mặt phẳng đi qua  $A$  và song song với  $(\alpha)$ .

f) *Định lí 3:* Cho hai mặt phẳng song song với nhau. Nếu một mặt phẳng cắt mặt phẳng này thì cũng cắt mặt phẳng kia và hai giao tuyến song song với nhau.



g) *Hệ quả:* Hai mặt phẳng song song chắn trên hai cát tuyến song song những đoạn thẳng bằng nhau.



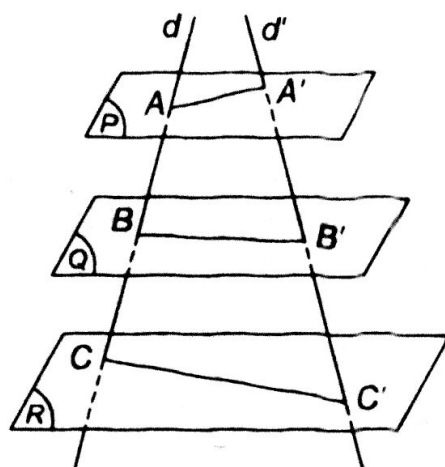
### 3. Định lí Ta-lét

*Định lí 4 (Định lí Ta-lét)*

Ba mặt phẳng đôi một song song chắn trên hai cát tuyến bất kì những đoạn thẳng tương ứng tỉ lệ.

Nếu  $d, d'$  là hai cát tuyến bất kì cắt ba mặt phẳng song song  $(\alpha), (\beta), (\gamma)$  lần lượt tại các điểm  $A, B, C$  và  $A', B', C'$  thì

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CA}{C'A'}$$



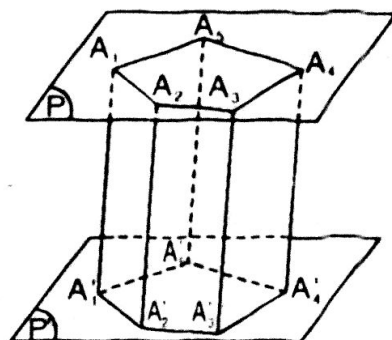
### 4. Hình lăng trụ và hình hộp

Hình hộp bởi các hình bình hành

$A_1A_2A_2'A_1', A_2A_3A_3'A_2', \dots, A_nA_1A_1'A_n'$

và hai đa giác  $A_1A_2 \dots A_n$  và  $A_1'A_2' \dots A_n'$

gọi là hình lăng trụ hoặc lăng trụ, và kí hiệu là  $A_1A_2 \dots A_nA_1'A_2' \dots A_n'$ .



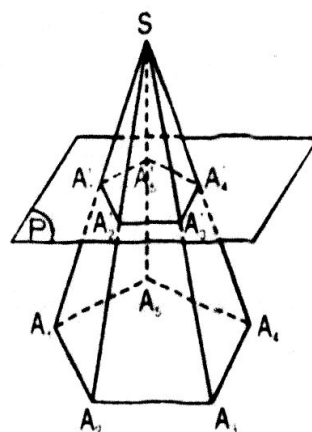
Nếu đáy của hình lăng trụ là tam giác, tứ giác, ngũ giác thì lăng trụ tương ứng được gọi là lăng trụ tam giác, lăng trụ tứ giác, lăng trụ ngũ giác.

Hình lăng trụ có đáy là hình bình hành được gọi là hình hộp.

### 5. Hình chóp cắt

Cho hình chóp  $S.A_1A_2 \dots A_n$ ; một mặt phẳng  $(P)$  không qua đỉnh, song song với mặt phẳng đáy, cắt các cạnh  $SA_1, SA_2, \dots, SA_n$  lần lượt tại  $A'_1, A'_2, \dots, A'_n$ .

Hình tạo bởi thiết diện  $A'_1A'_2 \dots A'_n$  và đáy  $A_1A_2 \dots A_n$  của hình chóp cùng với các tứ giác  $A'_1A'_2A_2A_1, A'_2A'_3A_3A_2, \dots, A'_nA'_1A_1A_n$  gọi là hình chóp cắt, kí hiệu  $A'_1A'_2 \dots A'_n.A_1A_2 \dots A_n$



Đáy của hình chóp gọi là đáy lớn của hình chóp cắt, còn thiết diện  $A'_1A'_2 \dots A'_n$  gọi là đáy nhỏ của hình chóp cắt.

*Tính chất:*

- 1) Hai đáy là hai đa giác có các cạnh tương ứng song song và các tỉ số các cặp cạnh tương ứng bằng nhau.
- 2) Các mặt bên là những hình thang.
- 3) Các đường thẳng chứa các cạnh bên đồng quy tại một điểm.

## B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

1. Trong mặt phẳng  $(\alpha)$  cho hình bình hành ABCD. Qua A, B, C, D lần lượt vẽ bốn đường thẳng a, b, c, d song song với nhau và không nằm trên  $(\alpha)$ . Trên a, b, c lần lượt lấy ba điểm A', B', C' tùy ý.

- a) Hãy xác định giao điểm D' của đường thẳng d với mặt phẳng  $(A'B'C')$ .  
b) Chứng minh A'B'C'D' là hình bình hành.

*Giải*

a) Ta có  $\begin{cases} a \parallel b \\ AD \parallel BC \end{cases} \Rightarrow (a, AD) \parallel (b, BC)$

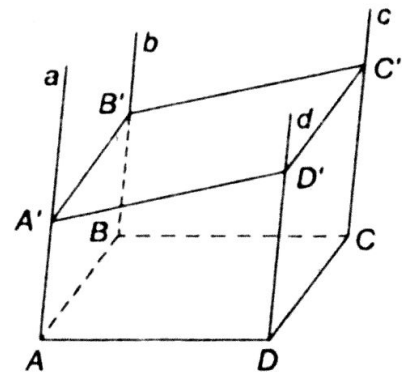
Mà  $(A'B'C') \cap (b, BC) = B'C'$  nên  
 $(A'B'C') \cap (a, AD) = d'$  đi qua A' song song với B'C'. Gọi D' là giao điểm của d' với d thì  
 $D' = d \cap (A'B'C')$ .

b) Ta có  $\begin{cases} a \parallel d \\ AB \parallel CD \end{cases} \Rightarrow (a, b) \parallel (c, d)$ .

Ta có:  $A'D' \parallel B'C'$ . (1)

Mặt khác:  $(a, b) \parallel (c, d)$  mà  $(A'B'C'D') \cap (a, b) = A'B'$   
và  $(A'B'C'D') \cap (c, d) = C'D'$  suy ra  $A'B' \parallel C'D'$ . (2)

Từ (1) và (2) suy ra tứ giác A'B'C'D' là hình bình hành.



2. Cho hình lăng trụ tam giác ABC.A'B'C'. Gọi M và M' lần lượt là trung điểm của các cạnh BC và B'C'.

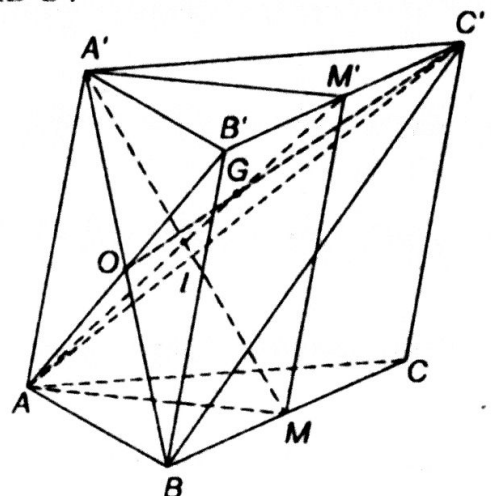
- a) Chứng minh rằng AM song song với A'M'.  
b) Tìm giao điểm của mặt phẳng  $(AB'C')$  với đường thẳng A'M.  
c) Tìm giao tuyến d của hai mặt phẳng  $(AB'C')$  và  $(BA'C')$ .  
d) Tìm giao điểm G của đường thẳng d với mặt phẳng  $(AM'M)$ .

Chứng minh G là trọng tâm của tam giác AB'C'.

*Giải*

- a) Ta có  $MM' \parallel BB'$  và  $MM' = BB'$   
do đó  $MM' \parallel AA'$  và  $MM' = AA'$ .  
Suy ra A'M'MA là hình bình hành.  
Vậy  $AM \parallel A'M'$ .

- b) Gọi I là giao điểm của A'M và AM'.  
 $M'A \subset (AB'C')$  và  $I \in M'A$  nên  $I \in (AB'C')$ .  
Vậy  $I = A'M \cap (AB'C')$ .



c) Gọi O là giao điểm của  $AB'$  và  $A'B$ .

Ta có:  $C', O \in (AB'C') \cap (BA'C') \Rightarrow (AB'C') \cap (BA'C') = C'O$ .

d) Ta có  $d \equiv C'O \subset (AB'C')$  và  $AM' \subset (AB'C')$ .

Gọi G là giao điểm của d và  $AM'$  thì  $G = d \cap (AM'M)$ .

Mặt khác  $OC'$  và  $AM'$  là các trung tuyến của  $\Delta AB'C'$  nên G là trọng tâm của  $\Delta AB'C'$ .

### 3. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ .

a) Chứng minh rằng hai mặt phẳng  $(BDA')$  và  $(B'D'C)$  song song với nhau.

b) Chứng minh rằng đường chéo  $AC'$  đi qua trọng tâm  $G_1$  và  $G_2$  của hai tam giác  $BDA'$  và  $B'D'C$ .

c) Chứng minh  $G_1$  và  $G_2$  chia đoạn  $AC'$  thành ba phần bằng nhau.

d) Gọi O và I lần lượt là tâm của các hình bình hành  $ABCD$  và  $AA'C'C$ . Xác định thiết diện của mặt phẳng  $(A'IO)$  với hình hộp đã cho.

*Giải*

a) Chứng minh  $(BDA') \parallel (B'D'C)$

Ta có tứ giác  $BB'D'D$  và  $A'B'CD$  là các hình bình hành nên:  $BD \parallel B'D'$  và  $AD' \parallel B'C \Rightarrow$  hai mặt phẳng  $(BDA')$  và  $(B'D'C)$  có các cặp đường thẳng cắt nhau và song song nhau từng đôi một nên chúng song song. Vậy  $(BDA') \parallel (B'D'C)$ .

b) Chứng minh  $G_1, G_2 \in AC'$

Gọi O, O' lần lượt là tâm của hình bình hành  $ABCD$  và  $A'B'C'D'$ .

Trong mặt phẳng  $(AA'C'C)$  gọi  $G_1, G_2$  lần lượt là giao điểm của  $AC'$  với  $A'O$  và  $O'C$ . Ta chứng minh  $G_1, G_2$  lần lượt là trọng tâm của  $\Delta A'BD$  và  $\Delta CB'D'$ .

Thật vậy, ta có  $\Delta G_1OA \sim \Delta G_1A'C'$  (vì  $AC \parallel A'C'$ ).

$$\Rightarrow \frac{G_1O}{G_1A'} = \frac{OA}{A'C'} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{AG_1}{A'O} = \frac{2}{3}$$

$\Rightarrow G_1$  là trọng tâm  $\Delta A'BD$ .

Tương tự  $G_2$  là trọng tâm của  $\Delta CB'D'$ .

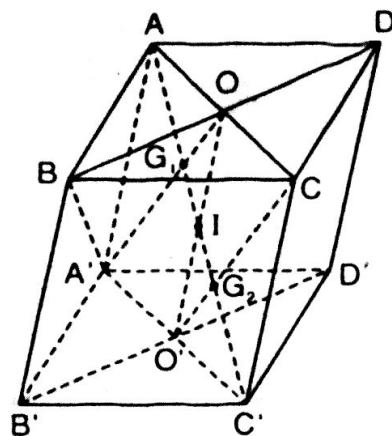
Vậy  $AC'$  đi qua  $G_1, G_2$ .

c) Chứng minh  $AG_1 = G_1G_2 = G_2C'$

Theo câu trên ta có:

$$\frac{AG_1}{G_1C'} = \frac{AO}{A'C'} = \frac{1}{2} \quad (\text{vì } \Delta G_1OA \sim \Delta G_1A'C')$$

$$\Rightarrow AG_1 = \frac{1}{3} AC' \quad (1)$$



Tương tự:  $\frac{C'G_2}{G_2A} = \frac{C'O'}{CA} = \frac{1}{2}$  (vì  $\Delta G_2C'O' \sim \Delta G_2AC$ )

$$\Rightarrow C'G_2 = \frac{1}{3}AC' \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra  $AG_1 = G_1G_2 = G_2C'$ .

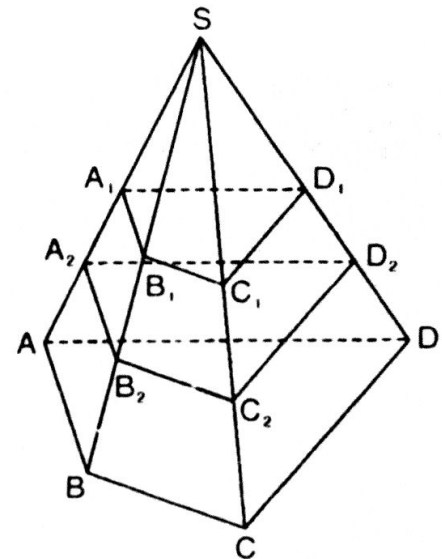
d)  $(A'IO) \equiv (AA'C'C) \Rightarrow (A'IO)$  cắt hình hộp đã cho theo thiết diện là hình bình hành  $AA'C'C$ .

4. Cho hình chóp  $S.ABCD$ . Gọi  $A_1$  là trung điểm của cạnh  $SA$  và  $A_2$  là trung điểm của đoạn  $AA_1$ . Gọi  $(\alpha)$  và  $(\beta)$  là hai mặt phẳng song song với mặt phẳng  $(ABCD)$  và lần lượt đi qua  $A_1, A_2$ . Mặt phẳng  $(\alpha)$  cắt các cạnh  $SB, SC, SD$  lần lượt tại  $B_1, C_1, D_1$ . Mặt phẳng  $(\beta)$  cắt các cạnh  $SB, SC, SD$  lần lượt tại  $B_2, C_2, D_2$ . Chứng minh:

- $B_1, C_1, D_1$  lần lượt là trung điểm của các cạnh  $SB, SC, SD$ ;
- $B_1B_2 = B_2B, C_1C_2 = C_2C, D_1D_2 = D_2D$ ;
- Chỉ ra các hình chóp cắt có một đáy là tứ giác  $ABCD$ .

*Giải*

- Vì  $(\alpha) \parallel (\beta) \parallel (ABCD)$  nên  
 $A_1B_1 \parallel A_2B_2 \parallel AB; B_1C_1 \parallel B_2C_2 \parallel BC$   
 $C_1D_1 \parallel C_2D_2 \parallel CD, A_1D_1 \parallel A_2D_2 \parallel AD$   
 $A_1B_1$  là đường trung bình của  $\Delta SAB$  nên  $B_1$  là trung điểm của  $SB$ .  
Tương tự  $C_1, D_1$  lần lượt là trung điểm của  $SC, SD$ .
- Ta có  $A_2B_2$  là đường trung bình của hình thang  $A_1B_1BA$  nên  $B_1B_2 = B_2B$ , tương tự  $C_1C_2 = C_2C, D_1D_2 = D_2D$
- Các hình chóp cắt có một đáy là tứ giác  $ABCD$  là  $A_2B_2C_2D_2.ABCD, A_1B_1C_1D_1.ABCD$ .



## C. BÀI TẬP LÀM THÊM

1. Cho hình lăng trụ tam giác  $ABCA'B'C'$ .

- Gọi  $I, K, G$  lần lượt là trọng tâm các tam giác  $ABC, A'B'C', ACC'$ . Chứng minh rằng  $(IGK) \parallel (BB'C'C)$  và  $(A'KG) \parallel (AIB')$ .
- Gọi  $M, N$  lần lượt là trung điểm của  $BB'$  và  $CC'$ . Hãy dựng đường thẳng qua trọng tâm tam giác  $ABC$  cắt  $AB'$  và  $MN$ .

### Hướng dẫn

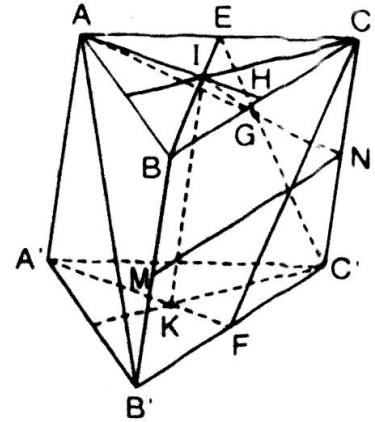
a) Tứ giác AA'KI thành hình bình hành

$$\Rightarrow IK \parallel AA' \Rightarrow IK \parallel BB'$$

Gọi E là trung điểm của AC. Xét  $\triangle EBC'$  có:

$$\frac{IE}{EB} = \frac{GE}{EC'} = \frac{1}{3} \Rightarrow IG \parallel BC'$$

$$\text{Từ: } \begin{cases} IK \parallel BB' \\ IG \parallel BC' \end{cases} \Rightarrow (IGK) \parallel (BB'C'C)$$



b) Đường thẳng cần tìm là giao tuyến của  $(IAB')$  và  $(IMN)$ .

Gọi H là giao điểm của BC và AI, B'H cắt MN tại O thì IO là đường thẳng cần dựng.

2. Cho lăng trụ tam giác ABCA'B'C'. M, N lần lượt là trung điểm của BC và CC'. P là điểm đối xứng của C qua A.

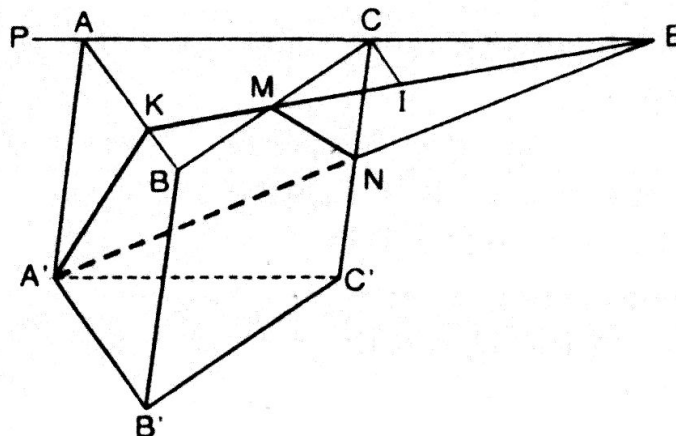
a) Xác định thiết diện của lăng trụ với mặt phẳng  $(A'MN)$ . Tính tỉ số mà thiết diện chia cạnh AB.

b) Xác định thiết diện của lăng trụ với mặt phẳng  $(MNP)$ . Tính tỉ số mà thiết diện chia cạnh AA' và AB.

### Hướng dẫn

a) Tứ giác A'KMN là thiết diện cần tìm. C là trung điểm AE. Kẻ CI // AB

$$\text{thì CI} = KB \text{ và CI} = \frac{1}{2} AK \Rightarrow AK = 2KB. \text{ Vậy } \frac{AK}{KB} = 2.$$



3. Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' cạnh a. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, B'C' và DA'.

a) Chứng minh  $(MNP)$  song song với các mặt phẳng  $(AB'D')$  và  $(BDC')$ .

b) Xác định thiết diện của hình lập phương với mặt phẳng  $(MNP)$ , thiết diện là hình gì? Tính diện tích của nó.

Đáp số: b) Thiết diện là hình lục giác đều cạnh  $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ .

## BÀI TẬP ÔN TẬP CHƯƠNG II

1. Cho hai hình thang  $ABCD$  và  $ABEF$  có chung đáy lớn  $AB$  và không cùng nằm trong một mặt phẳng.

a) Tìm giao tuyến của các mặt phẳng sau:

$(AEC)$  và  $(BFD)$ ;  $(BCE)$  và  $(ADF)$ .

b) Lấy  $M$  là điểm thuộc đoạn  $DF$ . Tìm giao điểm của đường thẳng  $AM$  với mặt phẳng  $(BCE)$ .

c) Chứng minh hai đường thẳng  $AC$  và  $BF$  không cắt nhau.

*Giải*

a) Gọi  $G$  là giao điểm của  $AC$  và  $BD$ ,

$H$  là giao điểm của  $AE$  và  $BF$ .

Ta có  $G, H \in (AEC) \cap (BFD)$

$$\Rightarrow (AEC) \cap (BFD) = GH$$

Gọi  $I$  là giao điểm của  $AD$  và  $BC$ ,

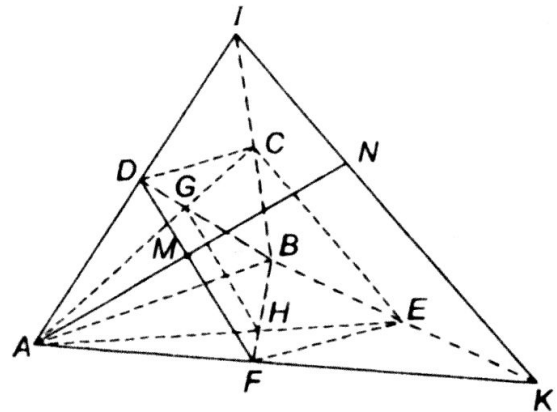
$K$  là giao điểm của  $AF$  và  $BE$ .

Ta có  $(BCE) \cap (ADF) = IK$ .

b) Gọi  $N$  là giao điểm của  $AM$  với  $IK$  thì  $N = AM \cap (BCE)$  (vì  $IK \subset (BCE)$ )

c) Nếu  $AC$  và  $BF$  cắt nhau thì hai hình thang đã cho cùng nằm trên một mặt phẳng.

Điều này trái với giả thiết.



2. Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy là hình bình hành  $ABCD$ . Gọi  $M, N, P$  theo thứ tự là trung điểm của các đoạn thẳng  $SA, BC, CD$ . Tìm thiết diện của hình chóp khi cắt bởi mặt phẳng  $(MNP)$ .

Gọi  $O$  là giao điểm hai đường chéo của hình bình hành  $ABCD$ , hãy tìm giao điểm của đường thẳng  $SO$  với mặt phẳng  $(MNP)$ .

*Giải*

Gọi  $E = AB \cap NP$ ;

$F = AD \cap NP$ ;

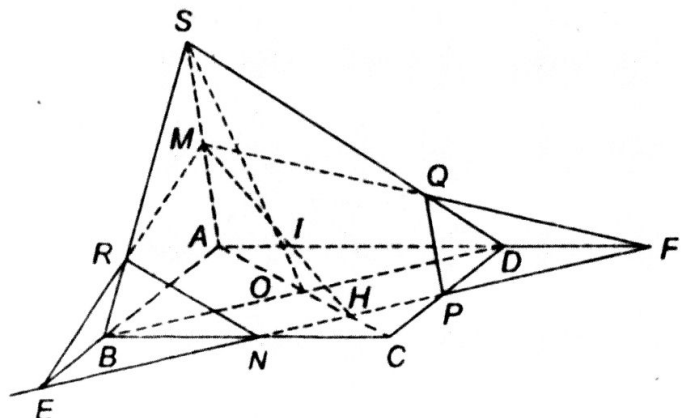
$R = SB \cap ME$ ;

$Q = SD \cap MF$ .

Thiết diện là ngũ giác  $MQPNR$ .

Gọi  $H = NP \cap AC$ ;  $I = SO \cap MH$ .

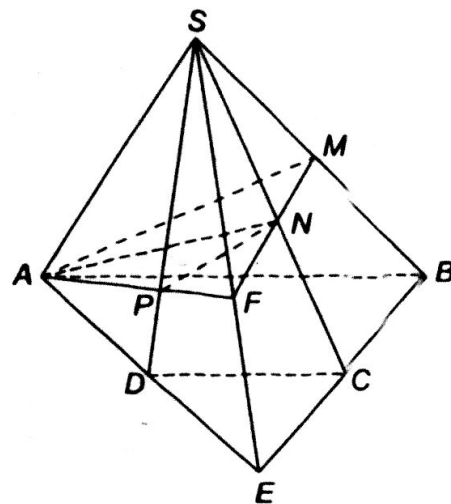
Ta có  $I = SO \cap (MNP)$ .



3. Cho hình chóp đỉnh S có đáy là hình thang ABCD với AB là đáy lớn. Gọi M, N theo thứ tự là trung điểm của các cạnh SB và SC.

- Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (SAD) và (SBC).
- Tìm giao điểm của đường thẳng SD với mặt phẳng (AMN).
- Tìm thiết diện của hình chóp S.ABCD cắt bởi mặt phẳng (AMN).

*Giải*



a) Gọi E là giao điểm của AD và BC.

Ta có  $S, E \in (SAD) \cap (SBC)$

nên  $(SAD) \cap (SBC) = SE$ .

b) Gọi F là giao điểm của MN và SE.

P là giao điểm của SD và AF thì

$P = SD \cap (AMN)$ .

c) Thiết diện của hình chóp S.ABCD cắt bởi mp(AMN) là tứ giác AMPN.

4. Cho hình bình hành ABCD. Qua A, B, C, D lần lượt vẽ bốn nửa đường thẳng Ax, By, Cz, Dt ở cùng phía đối với mặt phẳng (ABCD), song song với nhau và không nằm trong mặt phẳng (ABCD). Một mặt phẳng ( $\beta$ ) lần lượt cắt Ax, By, Cz và Dt tại A', B', C' và D'.

a) Chứng minh  $(Ax, By) \parallel (Cz, Dt)$ .

b) Gọi  $I = AC \cap BD$ ,  $J = A'C' \cap B'D'$ . Chứng minh  $IJ \parallel AA'$ .

c) Cho  $AA' = a$ ,  $BB' = b$ ,  $CC' = c$ . Hãy tính  $DD'$ .

*Giải*

a) Ta có  $Ax \parallel Dt$  và  $AB \parallel CD$

suy ra  $(Ax, By) \parallel (Cz, Dt)$ .

b) IJ là đường trung bình của hình thang

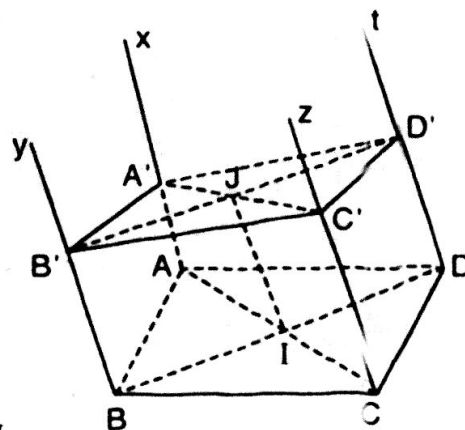
$BB'D'D$  nên  $IJ \parallel BB'$  suy ra  $IJ \parallel AA'$ .

c) Theo tính chất đường trung bình hình thang ta có:

$$AA' + CC' = 2IJ \text{ và } BB' + DD' = 2IJ.$$

$$\text{Do đó } AA' + CC' = BB' + DD'$$

$$\Rightarrow DD' = AA' + CC' - BB' = a + c - b.$$





## CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM CHƯƠNG II

1. Tìm mệnh đề sai trong các mệnh đề sau đây:

- (A) Nếu hai mặt phẳng có một điểm chung thì chúng còn có vô số điểm chung khác nữa.
- (B) Nếu hai mặt phẳng phân biệt cùng song song với mặt phẳng thứ ba thì chúng song song với nhau.
- (C) Nếu hai đường thẳng phân biệt cùng song song với một mặt phẳng thì song song với nhau.
- (D) Nếu một đường thẳng cắt một trong hai mặt phẳng song song với nhau thì sẽ cắt mặt phẳng còn lại.

*Trả lời:* (A), (B), (D) đúng. Chọn (C).

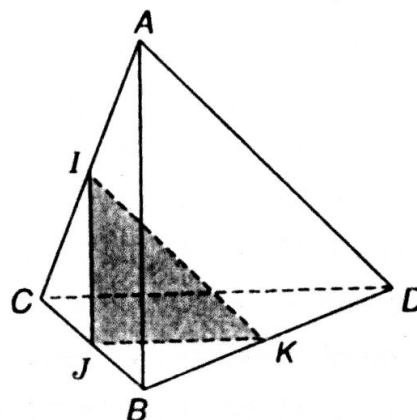
2. Nếu ba đường thẳng không cùng nằm trong một mặt phẳng và đôi một cắt nhau thì ba đường thẳng đó

- (A) Đồng quy;
- (B) Tạo thành tam giác;
- (C) Trùng nhau;
- (D) Cùng song song với một mặt phẳng.

*Trả lời:* Xem bài tập 3 §1 chương II. Chọn (A).

3. Cho tứ diện ABCD. Gọi I, J và K lần lượt là trung điểm của AC, BC và BD. Giao tuyến của hai mặt phẳng (ABD) và (IJK) là

- (A) KD;
- (B) KI;
- (C) Đường thẳng qua K và song song với AB;
- (D) Không có.



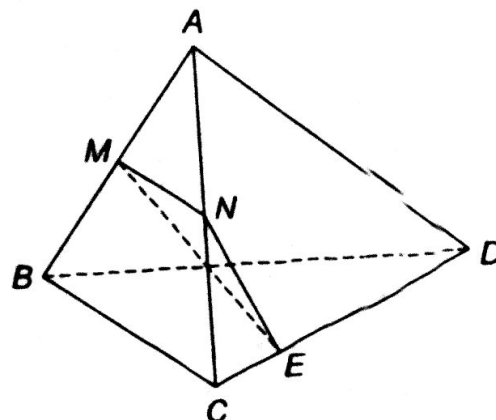
*Trả lời:*  $IJ \parallel AB \Rightarrow IJ \parallel (ABD) \Rightarrow (IJK) \text{ cắt } (ABD) \text{ theo giao tuyến qua K và song song với AB. Chọn (C).}$

4. Tìm mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau:

- (A) Nếu hai mặt phẳng  $(\alpha)$  và  $(\beta)$  song song với nhau thì mọi đường thẳng nằm trong  $(\alpha)$  đều song song với  $(\beta)$ .
- (B) Nếu hai mặt phẳng  $(\alpha)$  và  $(\beta)$  song song với nhau thì mọi đường thẳng nằm trong  $(\alpha)$  đều song song với mọi đường thẳng nằm trong  $(\beta)$ .
- (C) Nếu hai đường thẳng song song với nhau lần lượt nằm trong hai mặt phẳng phân biệt  $(\alpha)$  và  $(\beta)$  thì  $(\alpha)$  và  $(\beta)$  song song với nhau.
- (D) Qua một điểm nằm ngoài mặt phẳng cho trước ta vẽ được một và chỉ một đường thẳng song song với mặt phẳng cho trước đó.

**Trả lời:** (B), (C), (D) sai. Chọn (A).

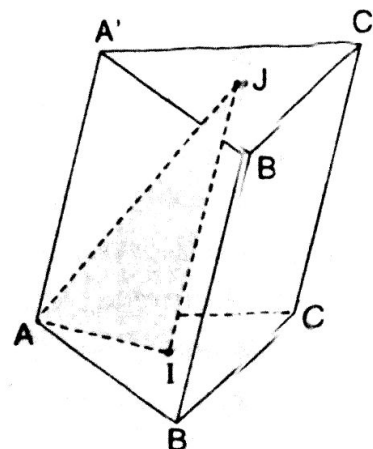
5. Cho tứ diện ABCD. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AB và AC. E là điểm trên cạnh CD với  $ED = 3EC$ . Thiết diện tạo bởi mặt phẳng (MNE) và tứ diện ABCD là:



- (A) Tam giác MNE.  
 (B) Tứ giác MNEF với F là điểm bất kì trên cạnh BD.  
 (C) Hình bình hành MNEF với F là điểm trên cạnh BD mà  $EF \parallel BC$ .  
 (D) Hình thang MNEF với F là điểm trên cạnh BD mà  $EF \parallel BC$ .

**Trả lời:**  $MN \parallel BC \Rightarrow MN \parallel (BCD) \Rightarrow (MNE)$  cắt  $(BCD)$  theo giao tuyến qua E và song song với BC. Chọn (D).

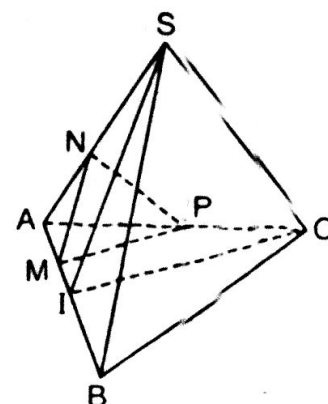
6. Cho hình lăng trụ tam giác ABC.A'B'C'. Gọi I, J lần lượt là trọng tâm của các tam giác ABC và A'B'C'. Thiết diện tạo bởi mặt phẳng (AIJ) với hình lăng trụ đã cho là



- (A) Tam giác cân;  
 (B) Tam giác vuông;  
 (C) Hình thang;  
 (D) Hình bình hành.

**Trả lời:** Gọi M và N lần lượt là trung điểm của BC và B'C'. Thiết diện là hình bình hành A'MN. Chọn (D).

7. Cho tứ diện đều SABC cạnh bằng a. Gọi I là trung điểm của đoạn AB, M là điểm di động trên đoạn AI. Qua M vẽ mặt phẳng  $(\alpha)$  song song với (SIC). Thiết diện tạo bởi  $(\alpha)$  và tứ diện SABC là



- (A) Tam giác cân tại M;  
 (B) Tam giác đều;  
 (C) Hình bình hành;  
 (D) Hình thoi.

**Trả lời:**

Ta có  $SI = CI \Rightarrow MN = MP$ .

Chọn (A).

8. Với giả thiết của bài tập 7 chu vi của thiết diện theo  $AM = x$  là

(A)  $x(1 + \sqrt{3})$ ;

(B)  $2x(1 + \sqrt{3})$ ;

(C)  $3x(1 + \sqrt{3})$ ;

(D) Không tính được.

**Trả lời:**  $AM = x \Rightarrow AB = 4x$

$$\Rightarrow IC = 2x\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow MN = MP = x\sqrt{3}$$

Chu vi  $\triangle MNP$  bằng  $2x\sqrt{3} + 2x = 2x(1 + \sqrt{3})$ . Chọn (B).

9. Cho hình bình hành ABCD. Gọi Bx, Cy, Dz là các đường thẳng song song lần lượt với nhau đi qua B, C, D và nằm về một phía của mặt phẳng (ABCD), đồng thời không nằm trong mặt phẳng (ABCD). Một mặt phẳng đi qua A và cắt Bx, Cy, Dz lần lượt tại B', C', D' với  $BB' = 2$ ,  $DD' = 4$ . Khi đó  $CC'$  bằng

(A) 3;

(B) 4;

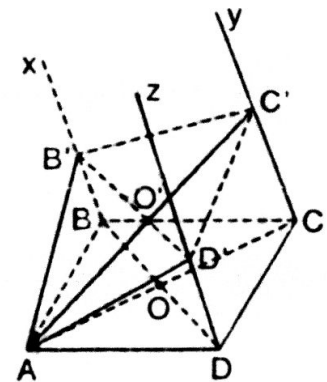
(C) 5;

(D) 6.

**Trả lời:** Gọi O và O' lần lượt là tâm các hình bình hành ABCD và AB'C'D'.

Ta có:  $BB' + DD' = 2OO' = CC'$

$$\Rightarrow CC' = 6. \text{ Chọn (D)}$$



10. Tìm mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau:

(A) Hai đường thẳng phân biệt cùng nằm trong một mặt phẳng thì không chéo nhau;

(B) Hai đường thẳng phân biệt không cắt nhau thì chéo nhau;

(C) Hai đường thẳng phân biệt không song song thì chéo nhau;

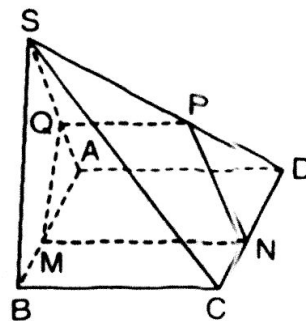
(D) Hai đường thẳng phân biệt lần lượt thuộc hai mặt phẳng khác nhau thì chéo nhau.

**Trả lời:** (B), (C), (D) sai. Chọn (A).

11. Cho hình vuông ABCD và tam giác đều SAB nằm trong hai mặt phẳng khác nhau. Gọi M là điểm di động trên đoạn AB. Qua M vẽ mặt phẳng  $(\alpha)$  song song với (SBC).

Thiết diện tạo bởi  $(\alpha)$  và hình chóp S.ABCD là hình gì ?

- (A) Tam giác;
- (B) Hình bình hành;
- (C) Hình thang;
- (D) Hình vuông.



*Trả lời:* Thiết diện là hình thang MNPQ. Chọn (C).

12. Với giả thiết của bài tập 11 gọi N, P, Q lần lượt là giao của mặt phẳng  $(\alpha)$  với các đường thẳng CD, DS, SA. Tập hợp các giao điểm I của hai đường thẳng MQ và NP là

- (A) Đường thẳng;
- (B) Nửa đường thẳng;
- (C) Đoạn thẳng song song với AB;
- (D) Tập hợp rỗng.

*Trả lời:*  $MQ \subset (SAB)$ ,  $NP \subset (SCD)$

$\Rightarrow I \in (SAB) \cap (SCD)$ . Chọn (C).

# Chương III. VECTƠ TRONG KHÔNG GIAN. QUAN HỆ VUÔNG GÓC TRONG KHÔNG GIAN

## §1. VECTƠ TRONG KHÔNG GIAN

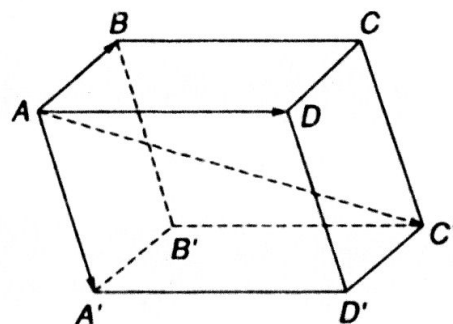
### A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

#### 1. Định nghĩa và các phép toán về vectơ trong không gian

a) *Định nghĩa:* Vectơ trong không gian là một đoạn thẳng có hướng. Kí hiệu  $\overrightarrow{AB}$  chỉ vectơ có điểm đầu A, điểm cuối B. Vectơ còn được kí hiệu là  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{x}, \vec{y}, \dots$

b) *Phép cộng và phép trừ vectơ trong không gian:* Phép cộng và phép trừ hai vectơ trong không gian được định nghĩa tương tự như phép cộng và phép trừ hai vectơ trong mặt phẳng. Phép cộng vectơ trong không gian cũng có các tính chất như phép cộng vectơ trong mặt phẳng. Khi thực hiện phép cộng vectơ trong không gian ta vẫn có thể áp dụng quy tắc ba điểm, quy tắc hình bình hành như đối với vectơ trong hình học phẳng.

*Quy tắc hình hộp:* Nếu hình hộp  $ABCD.A'B'C'D'$  có ba cạnh xuất phát từ đỉnh A là AB, AD, AA' và có đường chéo là AC' thì khi đó ta có quy tắc hình hộp là:  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AC'}$



c) *Phép nhân vectơ với một số:* Trong không gian, tích của vectơ  $\vec{a}$  với một số  $k \neq 0$  là vectơ  $k\vec{a}$  được định nghĩa tương tự như trong mặt phẳng và có các tính chất giống như các tính chất đã được xét trong mặt phẳng.

#### 2. Điều kiện đồng phẳng của ba vectơ

a) *Định nghĩa:* Trong không gian ba vectơ được gọi là đồng phẳng nếu các giá của chúng cùng song song với một mặt phẳng.

b) *Điều kiện để ba vectơ đồng phẳng*

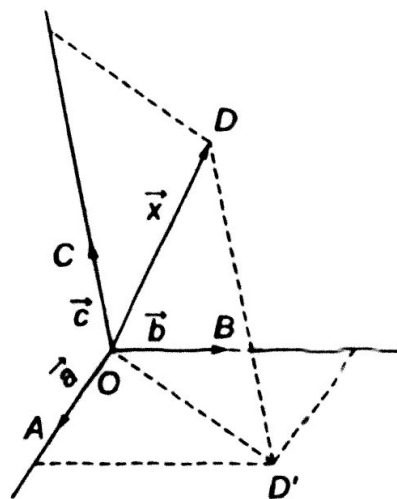
*Định lý 1:* Trong không gian cho hai vectơ  $\vec{a}, \vec{b}$  không cùng phương và vectơ  $\vec{c}$ . Khi đó ba vectơ  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  đồng phẳng khi và chỉ khi có cặp số m,

n sao cho  $\vec{c} = m\vec{a} + n\vec{b}$ .

Ngoài ra cặp số  $m, n$  là duy nhất.

**Định lí 2:** Trong không gian cho ba vectơ không đồng phẳng  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ .

Khi đó với mọi vectơ  $\vec{x}$  ta đều tìm được một bộ ba số  $m, n, p$  sao cho  $\vec{x} = m\vec{a} + n\vec{b} + p\vec{c}$ . Ngoài ra bộ ba số  $m, n, p$  là duy nhất.



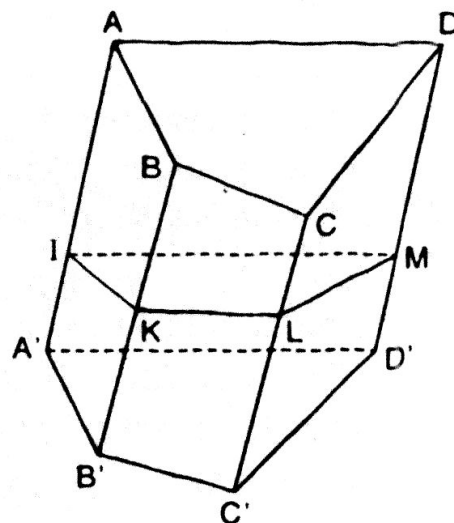
## B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

1. Cho hình lăng trụ tứ giác  $ABCD.A'B'C'D'$ . Mặt phẳng  $(P)$  cắt các cạnh bên  $AA', BB', CC', DD'$  lần lượt tại  $I, K, L, M$ . Xét các vectơ có các điểm đầu là các điểm  $I, K, L, M$  và có các điểm cuối là các đỉnh của hình lăng trụ. Hãy chỉ ra các vectơ:

- a) cùng phương với  $\vec{IA}$ ;                      b) cùng hướng với  $\vec{IA}$ ;  
c) ngược hướng với  $\vec{IA}$ .

*Giải*

- a) Các vectơ cùng phương với  $\vec{IA}$  là:  
 $\vec{IA'}, \vec{KB}, \vec{KB'}, \vec{LC}, \vec{LC'}, \vec{MD}, \vec{MD'}.$   
b) Các vectơ cùng hướng với  $\vec{IA}$  là:  
 $\vec{KB}, \vec{LC}, \vec{MD}.$   
c) Các vectơ ngược hướng với  $\vec{IA}$  là:  
 $\vec{IA'}, \vec{KB'}, \vec{LC'}, \vec{MD'}.$

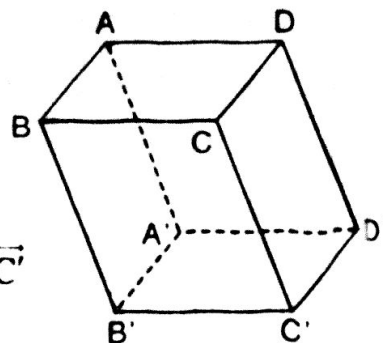


2. Cho hình hộp  $ABCD.A'B'C'D'$ . Chứng minh rằng:

- a)  $\vec{AB} + \vec{B'C'} + \vec{DD'} = \vec{AC'}$ ;                      b)  $\vec{BD} - \vec{D'D} - \vec{B'D'} = \vec{BB'}$ ;  
c)  $\vec{AC} + \vec{BA'} + \vec{DB} + \vec{C'D} = \vec{0}.$

*Giải*

- a) Áp dụng quy tắc hình hộp, ta có  
 $\vec{AB} + \vec{B'C'} + \vec{DD'} = \vec{AB} + \vec{AD} + \vec{AA'} = \vec{AC'}$   
Cách khác:  $\vec{AB} + \vec{B'C'} + \vec{DD'} = \vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CC'} = \vec{AC'}$   
b)  $\vec{BD} - \vec{D'D} - \vec{B'D'} = \vec{BD} + \vec{DD'} + \vec{D'B'} = \vec{BB'}$   
c)  $\vec{AC} + \vec{BA'} + \vec{DB} + \vec{C'D} = \vec{AC} + \vec{CD'} + \vec{D'B'} + \vec{B'A} = \vec{AA} = \vec{0}.$



3. Cho hình bình hành ABCD. Gọi S là một điểm nằm ngoài mặt phẳng chứa hình bình hành. Chứng minh rằng:  $\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SC} = \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SD}$ .

*Giải*

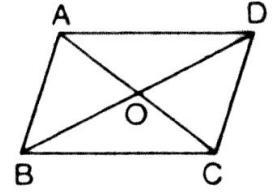
Gọi O là tâm của hình bình hành.

Ta có:  $\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SC} = 2\overrightarrow{SO}$  và  $\overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SD} = 2\overrightarrow{SO}$

Do đó:  $\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SC} = \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SD}$

Cách khác:

$$\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SC} = (\overrightarrow{SB} + \overrightarrow{BA}) + (\overrightarrow{SD} + \overrightarrow{DC}) = \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SD} + (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DC}) = \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SD}$$



4. Cho hình tứ diện ABCD. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AB và CD. Chứng minh rằng:

a)  $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC})$ ;      b)  $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD})$ .

*Giải*

a) Ta có: 
$$\begin{cases} \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DN} \\ \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CN} \end{cases}$$

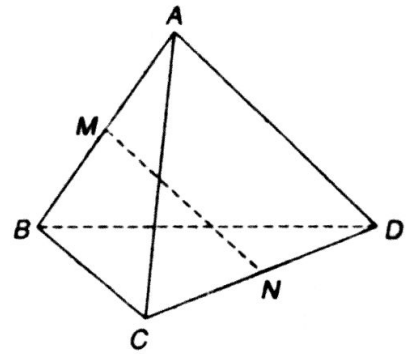
Suy ra  $2\overrightarrow{MN} = (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}) + (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}) + (\overrightarrow{DN} + \overrightarrow{CN}) = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}$

$$\Rightarrow \overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC})$$

b) Tương tự: 
$$\begin{cases} \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CN} \\ \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DN} \end{cases}$$

Suy ra  $2\overrightarrow{MN} = (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}) + (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}) + (\overrightarrow{CN} + \overrightarrow{DN}) = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}$

$$\Rightarrow \overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}).$$



5. Cho hình tứ diện ABCD. Hãy xác định hai điểm E, F sao cho:

a)  $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}$ ;      b)  $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD}$ .

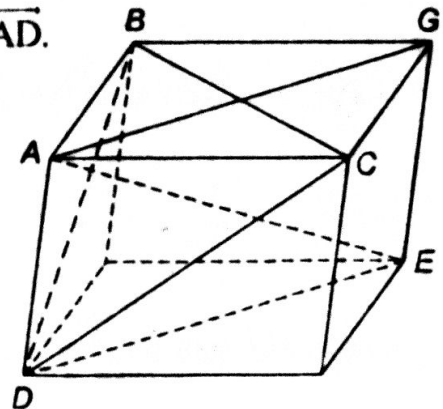
*Giải*

a) Ta có  $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}$

mà  $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{AD}$

với G là đỉnh thứ tư của hình bình

hành ABGC vì  $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ .





Vậy  $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{AD}$  với E là đỉnh thứ tư của hình bình hành AGED.

Do đó AE là đường chéo của hình hộp có ba cạnh là AB, AC, AD.

b) Ta có  $\overrightarrow{AF} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AG} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{DG}$ .

Vậy F là đỉnh thứ tư của hình bình hành ADGF.

6. Cho hình tứ diện ABCD. Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC. Chứng minh rằng:  $\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC} = 3\overrightarrow{DG}$ .

*Giải*

G là trọng tâm tam giác ABC nên  $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$ .

$$\begin{aligned}\text{Ta có } \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC} &= (\overrightarrow{DG} + \overrightarrow{GA}) + (\overrightarrow{DG} + \overrightarrow{GB}) + (\overrightarrow{DG} + \overrightarrow{GC}) \\ &= 3\overrightarrow{DG} + (\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}) = 3\overrightarrow{DG}\end{aligned}$$

7. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của các cạnh AC và BD của tứ diện ABCD. Gọi I là trung điểm của đoạn thẳng MN và P là một điểm bất kì trong không gian. Chứng minh rằng:

a)  $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID} = \vec{0}$ ;

b)  $\overrightarrow{PI} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PD})$ .

*Giải*

a) Ta có  $\overrightarrow{IM} + \overrightarrow{IN} = \vec{0}$

mà  $2\overrightarrow{IM} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IC}$  và  $2\overrightarrow{IN} = \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{ID}$

nên  $2(\overrightarrow{IM} + \overrightarrow{IN}) = \vec{0}$

suy ra  $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID} = \vec{0}$

- b) Với điểm P bất kì trong không gian ta có:

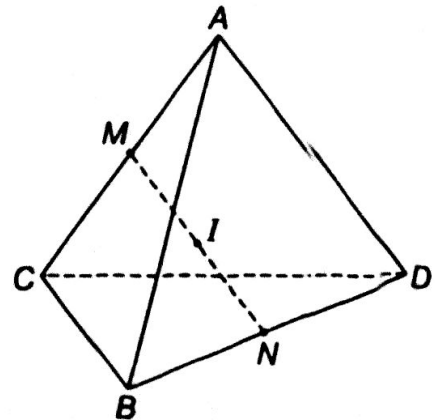
$$\overrightarrow{IA} = \overrightarrow{PA} - \overrightarrow{PI}, \quad \overrightarrow{IB} = \overrightarrow{PB} - \overrightarrow{PI}$$

$$\overrightarrow{IC} = \overrightarrow{PC} - \overrightarrow{PI}, \quad \overrightarrow{ID} = \overrightarrow{PD} - \overrightarrow{PI}$$

Vậy  $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID} = \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PD} - 4\overrightarrow{PI}$

mà theo câu a), ta có  $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID} = \vec{0}$  nên suy ra:

$$\overrightarrow{PI} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PD}).$$



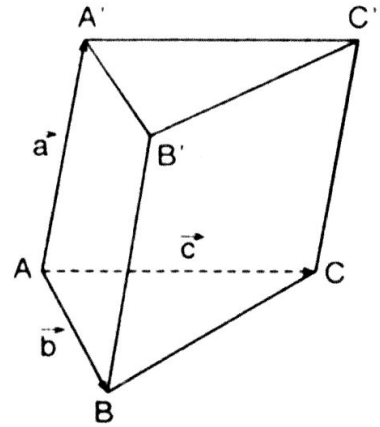
8. Cho hình lăng trụ tam giác ABC.A'B'C' có  $\overrightarrow{AA'} = \vec{a}$ ,  $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$ ,  $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$ . Hãy phân tích (hay biểu thị) các vectơ  $\overrightarrow{B'C}$ ,  $\overrightarrow{BC'}$  qua các vectơ  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$ .

*Giải*

Ta có:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{B'C} &= \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB'} = \overrightarrow{AC} - (\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{AB}) \\ &= \vec{c} - \vec{a} - \vec{b}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BC'} &= \overrightarrow{AC'} - \overrightarrow{AB} = (\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{AC}) - \overrightarrow{AB} \\ &= \vec{a} + \vec{c} - \vec{b}\end{aligned}$$



9. Cho tam giác ABC. Lấy điểm S nằm ngoài mặt phẳng (ABC). Trên đoạn SA lấy điểm M sao cho  $\overrightarrow{MS} = -2\overrightarrow{MA}$  và trên đoạn BC lấy điểm N sao cho  $\overrightarrow{NB} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{NC}$ . Chứng minh rằng ba vectơ  $\overrightarrow{AB}$ ,  $\overrightarrow{MN}$ ,  $\overrightarrow{SC}$  đồng phẳng.

*Giải*

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MS} + \overrightarrow{SC} + \overrightarrow{CN} \quad (1)$$

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN}$$

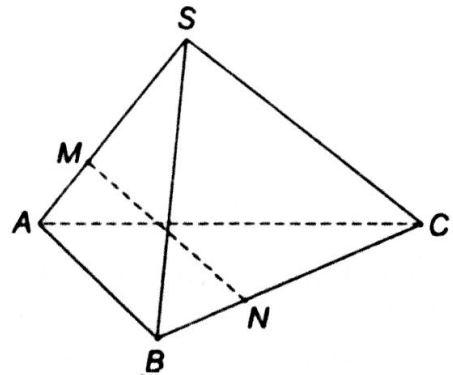
$$\Rightarrow 2\overrightarrow{MN} = 2\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BN} \quad (2)$$

Cộng (1) với (2) ta được:

$$3\overrightarrow{MN} = \underbrace{\overrightarrow{MS} + 2\overrightarrow{MA}}_{\vec{0}} + \overrightarrow{SC} + 2\overrightarrow{AB} + \underbrace{\overrightarrow{CN} + 2\overrightarrow{BN}}_{\vec{0}}$$

$$\text{Vậy } \overrightarrow{MN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{SC} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}.$$

Do đó ba vectơ  $\overrightarrow{MN}$ ,  $\overrightarrow{SC}$ ,  $\overrightarrow{AB}$  đồng phẳng.



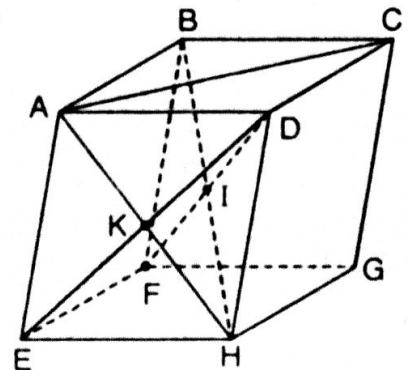
10. Cho hình hộp ABCD.EFGH. Gọi K là giao điểm của AH và DE, I là giao điểm của BH và DF. Chứng minh ba vectơ  $\overrightarrow{AC}$ ,  $\overrightarrow{KI}$ ,  $\overrightarrow{FG}$  đồng phẳng.

*Giải*

Ta có  $KI \parallel EF \parallel AB$  nên  $KI \parallel mp(ABC)$ ,

$FG \parallel BC$  và  $AC \subset mp(ABC)$ .

Do đó ba vectơ  $\overrightarrow{KI}$ ,  $\overrightarrow{FG}$ ,  $\overrightarrow{AC}$  có giá cùng song song với một mặt phẳng ( $\alpha$ ) là mặt phẳng song song với mặt phẳng (ABC). Vậy ba vectơ  $\overrightarrow{KI}$ ,  $\overrightarrow{FG}$ ,  $\overrightarrow{AC}$  đồng phẳng.



### C. BÀI TẬP LÀM THÊM

1. Cho tứ diện ABCD. Gọi E, F lần lượt là trung điểm của AB, AC, I là trung điểm của EF.

a) Chứng minh rằng  $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID} = \vec{0}$ .

b) M bất kì trong không gian, chứng minh:  $4 \overrightarrow{MI} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}$

c) Tìm  $M \in (P)$  cố định sao cho  $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}|$  nhỏ nhất.

#### Hướng dẫn

a)  $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = 2\overrightarrow{IE}$ ,  $\overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID} = 2\overrightarrow{IF}$  và  $\overrightarrow{IE} + \overrightarrow{IF} = \vec{0}$ .

b) Áp dụng quy tắc 3 điểm xen I vào vế phải.

c) Áp dụng câu b)  $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}| = 4|\overrightarrow{MI}|$  nhỏ nhất khi M là hình chiếu vuông góc của I lên (P).

2. Cho hình hộp ABCD.A'B'C'D'. Gọi P, R lần lượt là trung điểm các cạnh AB, A'D, gọi P', Q, Q' lần lượt là giao điểm các đường chéo của các mặt ABCD, CDD'C, A'B'C'D', ADD'A'.

a) Chứng minh rằng:  $\overrightarrow{PP'} + \overrightarrow{QQ'} + \overrightarrow{RR'} = \vec{0}$ .

b) Chứng minh rằng hai tam giác PQR, P'Q'R' có cùng trọng tâm.

#### Hướng dẫn

a)  $\overrightarrow{PP'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$ ,  $\overrightarrow{QQ'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DA'}$ ,  $\overrightarrow{RR'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{A'A}$

$$= \overrightarrow{PP'} + \overrightarrow{QQ'} + \overrightarrow{RR'} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DA'} + \overrightarrow{A'A}) = \vec{0}$$

b) Gọi G và G' lần lượt là trọng tâm  $\Delta PQR$  và  $\Delta P'Q'R'$ . Áp dụng a) và hệ ba điểm suy ra:  $3\overrightarrow{GG'} = \vec{0}$

3. Cho hình hộp xiên ABCD.A'B'C'D'. Gọi G là trọng tâm tam giác A'B'C'.

a) Chứng minh  $\overrightarrow{BD'} = 3\overrightarrow{BG}$

b) Gọi P, Q, R là ảnh đối xứng của điểm D' qua các điểm A, B', C. Chứng tỏ rằng B là trọng tâm của tứ diện PQRD'.

#### Hướng dẫn

a) Áp dụng quy tắc trọng tâm  $3\overrightarrow{BG} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BD'}$

b) Chứng minh  $\overrightarrow{BP} + \overrightarrow{BQ} + \overrightarrow{BR} + \overrightarrow{BD'} = \vec{0}$

## §2. HAI ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC

### A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

#### 1. Tích vô hướng của hai vectơ trong không gian

##### a. Góc giữa hai vectơ trong không gian

**Định nghĩa:** Trong không gian, cho  $\vec{u}$  và  $\vec{v}$  là hai vectơ khác vectơ - không.

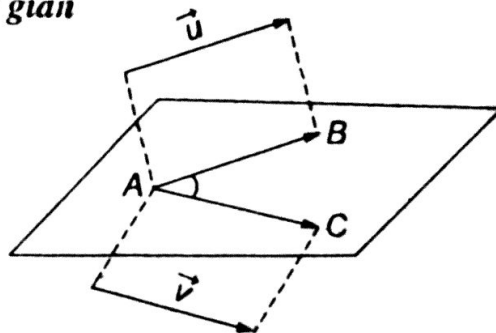
Lấy một điểm A bất kì, gọi B và C là hai điểm sao cho  $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ ,  $\overrightarrow{AC} = \vec{v}$ .

Khi đó ta gọi góc  $\widehat{BAC}$  ( $0^\circ \leq \widehat{BAC} \leq 180^\circ$ ) là góc giữa hai vectơ  $\vec{u}$  và  $\vec{v}$  trong không gian, kí hiệu là  $(\vec{u}, \vec{v})$

##### b. Tích vô hướng của hai vectơ trong không gian

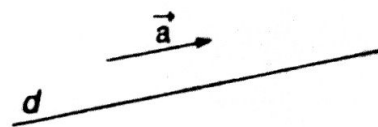
**Định nghĩa:** Trong không gian cho hai vectơ  $\vec{u}$  và  $\vec{v}$  đều khác vectơ - không. Tích vô hướng của hai vectơ  $\vec{u}$  và  $\vec{v}$  là một số, kí hiệu là  $\vec{u} \cdot \vec{v}$ , được xác định bởi công thức:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos(\vec{u}, \vec{v})$$



#### 2. Vectơ chỉ phương của đường thẳng

**Định nghĩa:** Vectơ  $\vec{a}$  khác vectơ - không được gọi là vectơ chỉ phương của đường thẳng d nếu giá của vectơ  $\vec{a}$  song song hoặc trùng với đường thẳng d.



#### 3. Góc giữa hai đường thẳng trong không gian

**Định nghĩa:** Góc giữa hai đường thẳng a và b trong không gian là góc giữa hai đường thẳng a' và b' cùng đi qua một điểm và lần lượt song song với a và b.

#### 4. Hai đường thẳng vuông góc

**Định nghĩa:** Hai đường thẳng được gọi là vuông góc với nhau nếu góc giữa chúng bằng  $90^\circ$ .

Kí hiệu hai đường thẳng a và b vuông góc với nhau là  $a \perp b$ .

### B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

1. Cho hình lập phương ABCD.EFGH. Hãy xác định góc giữa các cặp vectơ sau đây:

a)  $\overrightarrow{AF}$  và  $\overrightarrow{EG}$ ;

b)  $\overrightarrow{AF}$  và  $\overrightarrow{EH}$ ;

c)  $\overrightarrow{AF}$  và  $\overrightarrow{DH}$ .

*Giải*

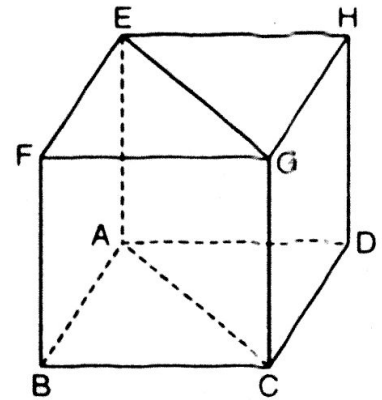
a) Ta có  $\overrightarrow{EG} = \overrightarrow{AC}$  nên

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{EG}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 45^\circ.$$

b) Tam giác FAC đều nên

$$(\overrightarrow{AF}, \overrightarrow{EG}) = (\overrightarrow{AF}, \overrightarrow{AC}) = 60^\circ.$$

c)  $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DH}) = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE}) = 90^\circ.$



2. Cho tứ diện ABCD.

a) Chứng minh rằng  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ .

b) Từ đẳng thức trên hãy suy ra rằng nếu tứ diện ABCD có  $AB \perp CD$  và  $AC \perp DB$  thì  $AD \perp BC$ .

*Giải*

a) Ta có

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} &= \overrightarrow{AB}(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC}) + \overrightarrow{AC}(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}) + \overrightarrow{AD}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) \\ &= \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \end{aligned}$$

b) Nếu  $AB \perp CD$  và  $AC \perp BD$  thì  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$  và  $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB} = 0$ .

Theo câu a) suy ra  $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$

$$\Rightarrow AD \perp BC.$$

3. a) Trong không gian nếu hai đường thẳng a và b cùng vuông góc với đường thẳng c thì a và b có song song với nhau không?

b) Trong không gian nếu đường thẳng a vuông góc với đường thẳng b và đường thẳng b vuông góc với đường thẳng c thì a có vuông góc với c không?

*Trả lời*

a) a và b nói chung không song song

b) a và c nói chung không vuông góc.

4. Trong không gian cho hai tam giác đều ABC và ABC' có chung cạnh AB và nằm trong hai mặt phẳng khác nhau. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của các cạnh AC, CB, BC', C'A.

Chứng minh rằng:

a)  $AB \perp CC'$ ;

b) Tứ giác MNPQ là hình chữ nhật.

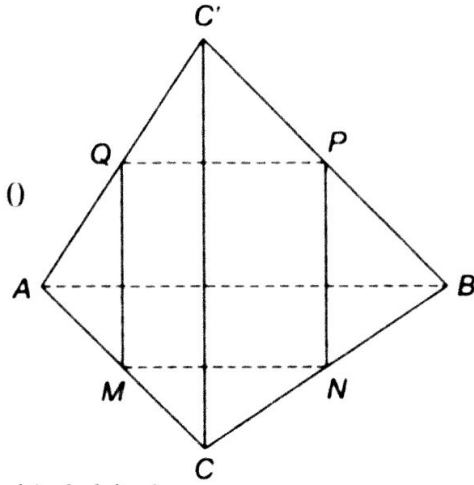
*Giải*

$$\begin{aligned} \text{a) Ta có } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CC'} &= \overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{AC'} - \overrightarrow{AC}) \\ &= \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC'} - \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \\ &= AB \cdot AC' \cdot \cos 60^\circ - AB \cdot AC' \cdot \cos 60^\circ = 0 \\ \Rightarrow AB &\perp CC'. \end{aligned}$$

$$\text{b) Ta có: } \begin{cases} MQ \parallel CC' \text{ và } MQ = \frac{1}{2} CC' \\ NP \parallel CC' \text{ và } NP = \frac{1}{2} CC' \end{cases}$$

$\Rightarrow MQ \parallel NP$  và  $MQ = NP \Rightarrow MNPQ$  là hình bình hành.

Mặt khác  $PQ \parallel AB$ ,  $MQ \parallel CC'$ ,  $AB \perp CC'$  nên  $MQ \perp PQ$ . Do đó hình bình hành  $MNPQ$  là hình chữ nhật.



5. Cho hình chóp tam giác  $S.ABC$  có  $SA = SB = SC$  và có  $\widehat{ASB} = \widehat{BSC} = \widehat{CSA}$ . Chứng minh rằng  $SA \perp BC$ ,  $SB \perp AC$ ,  $SC \perp AB$ .

*Giải*

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{BC} &= \overrightarrow{SA} \cdot (\overrightarrow{SC} - \overrightarrow{SB}) = \overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{SC} - \overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{SB} \\ &= SA \cdot SC \cdot \cos \widehat{ASC} - SA \cdot SB \cdot \cos \widehat{ASB} = 0 \Rightarrow SA \perp BC \end{aligned}$$

Chứng minh tương tự ta được  $SB \perp AC$ ,  $SC \perp AB$ .

6. Trong không gian cho hai hình vuông  $ABCD$  và  $ABC'D'$  có chung cạnh  $AB$  và nằm trong hai mặt phẳng khác nhau, lần lượt có tâm  $O$  và  $O'$ . Chứng minh rằng  $AB \perp OO'$  và tứ giác  $CDD'C'$  là hình chữ nhật.

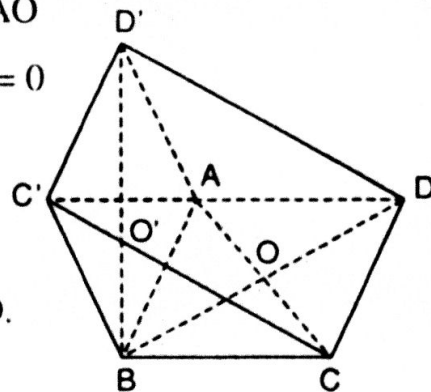
*Giải*

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{OO'} &= \overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{AO'} - \overrightarrow{AO}) = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AO'} - \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AO} \\ &= AB \cdot AO' \cdot \cos 45^\circ - AB \cdot AO \cdot \cos 45^\circ = 0 \\ \Rightarrow AB &\perp OO'. \end{aligned}$$

Ta có  $CD \parallel C'D'$  và  $CD = C'D'$  nên tứ giác  $CDD'C'$  là hình bình hành.

Mặt khác  $OO' \parallel CC'$  nên  $CC' \perp AB \Rightarrow CC' \perp CD$ .

Vậy hình bình hành  $CDD'C'$  là hình chữ nhật.



7. Cho  $S$  là diện tích của tam giác  $ABC$ . Chứng minh rằng:

$$S = \frac{1}{2} \sqrt{\overrightarrow{AB}^2 \cdot \overrightarrow{AC}^2 - (\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC})^2}.$$

*Giải*

$$\text{Ta có } S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC \sin A = \frac{1}{2} AB \cdot AC \sqrt{1 - \cos^2 A}.$$

$$\text{Vì } \cos A = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}|} \text{ nên } \sqrt{1 - \cos^2 A} = \sqrt{\frac{\overrightarrow{AB}^2 \cdot \overrightarrow{AC}^2 - (\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC})^2}{\overrightarrow{AB}^2 \cdot \overrightarrow{AC}^2}}.$$

$$\text{Do đó } S_{ABC} = \frac{1}{2} \sqrt{\overrightarrow{AB}^2 \cdot \overrightarrow{AC}^2 - (\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC})^2}.$$

8. Cho tứ diện ABCD có  $AB = AC = AD$  và  $\widehat{BAC} = \widehat{BAD} = 60^\circ$ . Chứng minh rằng:

a)  $AB \perp CD$ ;

b) Nếu M, N lần lượt là trung điểm của AB và CD thì  $MN \perp AB$  và  $MN \perp CD$ .

*Giải*

$$\text{a) } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC}) = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$$

$$= AB \cdot AD \cdot \cos 60^\circ - AB \cdot AC \cdot \cos 60^\circ = 0 \Rightarrow AB \perp CD.$$

$$\text{b) } \overrightarrow{MN} = \frac{1}{2} (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}) = \frac{1}{2} (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) \text{ (bài tập 4)}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{MN} = \frac{1}{2} (\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}^2)$$

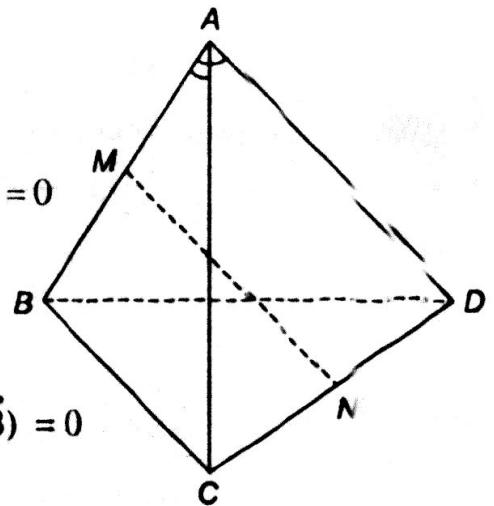
$$= \frac{1}{2} (AB^2 \cos 60^\circ + AB^2 \cos 60^\circ - AB^2) = 0$$

Do đó  $MN \perp AB$ .

Chứng minh tương tự ta có

$$\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{MN} = \frac{1}{2} (\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC}) \cdot (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = 0$$

Vậy  $MN \perp CD$ .



### C. BÀI TẬP LÀM THÊM

1. Cho tứ diện đều ABCD có cạnh bằng a. Gọi M, N lần lượt là trung điểm các cạnh AB, CD.

a) Tính độ dài đoạn MN;

b) Tính góc giữa các đường thẳng MN và BC,

c) Chứng minh:  $MN \perp AB$  và  $MN \perp CD$ .

*Hướng dẫn*

$$\text{Đặt } \overrightarrow{BA} = \vec{a}, \overrightarrow{BC} = \vec{c}, \overrightarrow{BD} = \vec{b} \Rightarrow |\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = a \text{ và } \vec{a} \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{c} = \frac{1}{2} a^2$$



Khi đó:  $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}) = \frac{1}{2}(\vec{b} - \vec{a} + \vec{c})$

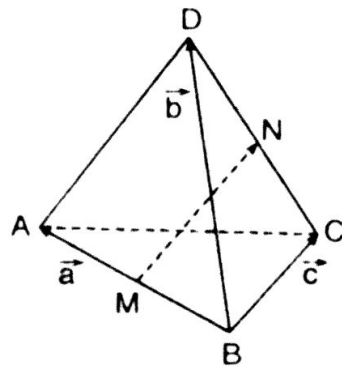
a)  $\overrightarrow{MN}^2 = \frac{1}{4}(\vec{b} - \vec{a} + \vec{c})^2$   
 $= \frac{1}{4}(a^2 + a^2 + c^2 - 2\vec{a}\vec{b} + 2\vec{b}\vec{c} - 2\vec{a}\vec{c}) = \frac{1}{2}a^2$

b)  $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}a^2$ , góc giữa MN, BC là  $45^\circ$

c) Ta có  $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{MN} = \vec{a} \cdot \frac{1}{2}(\vec{b} - \vec{a} + \vec{c}) = \frac{1}{2}(\vec{a} \cdot \vec{b} - a^2 + \vec{a} \cdot \vec{c}) = 0 \Rightarrow MN \perp AB$

$$\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\vec{b} - \vec{c}) \cdot (\vec{b} - \vec{a} + \vec{c}) = \frac{1}{2}(a^2 - \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{c} - \vec{c} \cdot \vec{b} + \vec{c} \cdot \vec{a} - a^2) = 0$$

$\Rightarrow MN \perp CD$



2. Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D'. Các điểm M, N lần lượt chia các đoạn thẳng AD' và DB theo cùng tỉ số k (k ≠ 0, 1).

a) Chứng minh rằng MN luôn luôn song song với mp(A'D'BC); và chứng minh rằng nếu  $k = -\frac{1}{2}$  thì:

b)  $MN \parallel A'C$ ;

c)  $MN \perp AD'$  và  $MN \perp BD$

*Hướng dẫn*

a) Đặt:  $\overrightarrow{AA'} = \vec{a}$ ,  $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$ ,  $\overrightarrow{AD} = \vec{c}$

Theo giả thiết, ta có:

$$\overrightarrow{MA} = k\overrightarrow{MD'} \Rightarrow \overrightarrow{MA} = k(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AD'})$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AM} = \frac{k}{k-1}\overrightarrow{AD'} = \frac{k}{k-1}(\vec{a} + \vec{c})$$

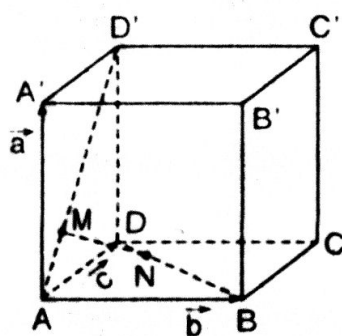
$$\overrightarrow{AN} = \frac{\overrightarrow{AD} - k\overrightarrow{AB}}{1-k} = \frac{\vec{c} - k\vec{b}}{1-k}$$

Suy ra:  $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AM} = \frac{\vec{c} - k\vec{b} + k\vec{a} + k\vec{c}}{1-k}$

$$= \frac{1}{1-k} \left[ k(\vec{a} - \vec{b}) + (k+1)\vec{c} \right] = \frac{1}{1-k}\overrightarrow{BA'} + \frac{1+k}{1-k}\overrightarrow{BC} \quad (1)$$

Dạng thức (1) chứng tỏ  $\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{BA'}, \overrightarrow{BC}$  đồng phẳng và do MN không thuộc mp(A'BCD') nên  $MN \parallel \text{mp}(A'BCD')$ .

Khi  $k = -\frac{1}{2}$  thì (1) trở thành:  $\overrightarrow{MN} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{BA'} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC} = \frac{1}{3}\overrightarrow{A'C}$



b) Và do các đường thẳng MN và A'C cắt mp(ABCD) tại các điểm khác nhau nên chúng không trùng nhau. Vậy  $MN \parallel A'C$ .

c) Ta có:  $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{AD'} = \frac{1}{3} \overrightarrow{A'C} \cdot \overrightarrow{AD'} = \frac{1}{3} (\vec{b} + \vec{c} - \vec{a}) (\vec{c} + \vec{a}) = \frac{1}{3} \vec{b} (\vec{c} + \vec{a}) + \frac{1}{3} (\vec{c}^2 - \vec{a}^2) = 0$

(Vì  $AB \perp mp(ADD'A')$  và  $\begin{pmatrix} \vec{a}^2 \\ \vec{c}^2 \end{pmatrix}$ ).

Vậy  $MN \perp AD'$ .

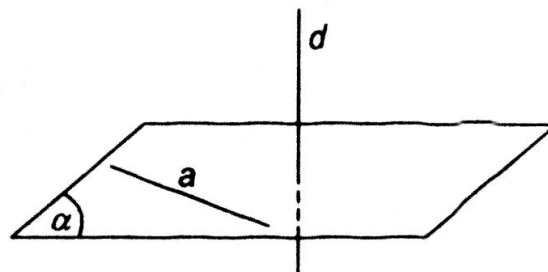
## §3. ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC VỚI MẶT PHẪNG

### A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

#### 1. Định nghĩa

Đường thẳng d được gọi là vuông góc với mặt phẳng ( $\alpha$ ) nếu d vuông góc với mọi đường thẳng a nằm trong mặt phẳng ( $\alpha$ ).

Kí hiệu là  $d \perp (\alpha)$ .



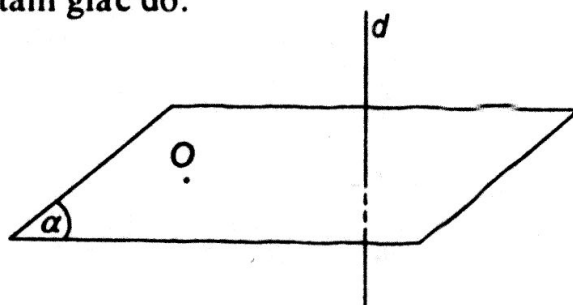
#### 2. Điều kiện để đường thẳng vuông góc với mặt phẳng

**Định lí:** Nếu một đường thẳng vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau cùng thuộc một mặt phẳng thì nó vuông góc với mặt phẳng ấy.

**Hệ quả:** Nếu một đường thẳng vuông góc với hai cạnh của một tam giác thì nó cũng vuông góc với cạnh thứ ba của tam giác đó.

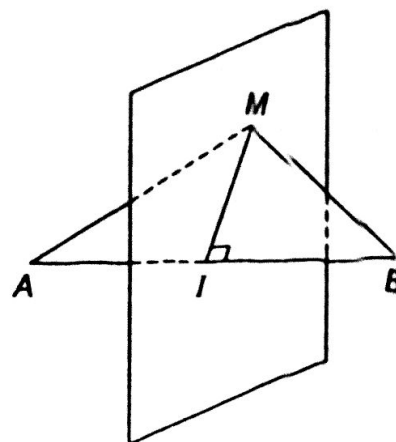
#### 3. Tính chất

a) **Tính chất 1:** Có duy nhất một mặt phẳng đi qua một điểm cho trước và vuông góc với một đường thẳng cho trước.

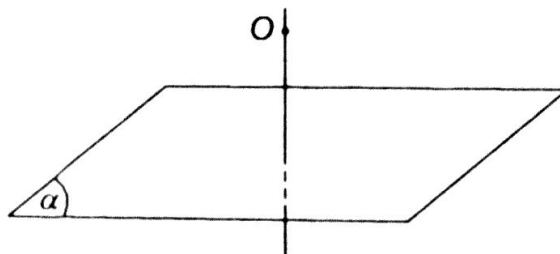


#### **Mặt phẳng trung trực của một đoạn thẳng**

Người ta gọi mặt phẳng đi qua trung điểm I của đoạn thẳng AB và vuông góc với đường thẳng AB là mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB.



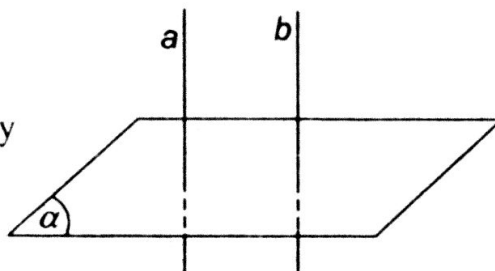
- b) *Tính chất 2:* Có duy nhất một đường thẳng đi qua một điểm cho trước và vuông góc với một mặt phẳng cho trước.



#### 4. Liên hệ giữa quan hệ song song và quan hệ vuông góc của đường thẳng và mặt phẳng

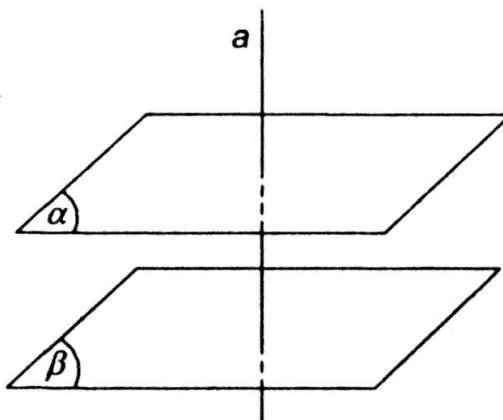
##### *Tính chất 1*

- a) Cho hai đường thẳng song song. Mặt phẳng nào vuông góc với đường thẳng này thì cũng vuông góc với đường thẳng kia.
- b) Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song với nhau.



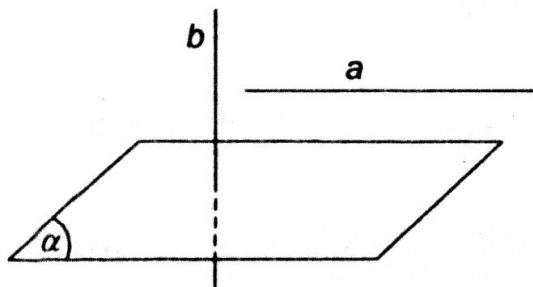
##### *Tính chất 2*

- a) Cho hai mặt phẳng song song. Đường thẳng nào vuông góc với mặt phẳng này thì cũng vuông góc với mặt phẳng kia.
- b) Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song với nhau.



##### *Tính chất 3*

- a) Cho đường thẳng  $a$  và mặt phẳng  $(\alpha)$  song song với nhau. Đường thẳng nào vuông góc với  $(\alpha)$  thì cũng vuông góc với  $a$ .
- b) Nếu một đường thẳng và một mặt phẳng (không chứa đường thẳng đó) cùng vuông góc với một đường thẳng khác thì chúng song song với nhau.

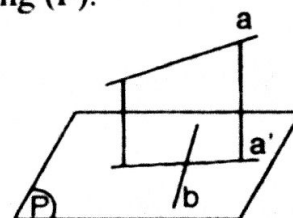


#### 5. Định lý ba đường vuông góc

*Định nghĩa:* Phép chiếu song song lên mặt phẳng  $(P)$  theo phương  $l$  vuông góc tới mặt phẳng  $(P)$  gọi là phép chiếu vuông góc lên mặt phẳng  $(P)$ .

##### *Định lý (Định lý 3 đường vuông góc)*

Cho đường thẳng  $a$  không vuông góc với mặt phẳng  $(P)$  và đường thẳng  $b$  nằm trong  $(P)$ . Khi đó điều kiện cần và đủ để  $b$  vuông góc với  $a$  là  $b$  vuông góc với hình chiếu  $a'$  của  $a$  trên  $(P)$ .



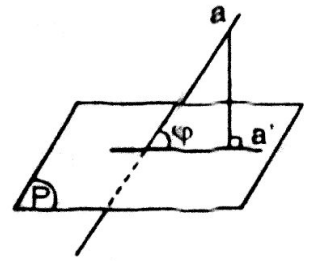
$$b \perp a \Leftrightarrow b \perp a'$$

## 6. Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng

**Định nghĩa:** Nếu đường thẳng  $a \perp (P)$  thì ta nói góc giữa đường thẳng  $a$  và mặt phẳng  $(P)$  bằng  $90^\circ$ .

Nếu đường thẳng  $a$  không vuông góc với mặt phẳng  $(P)$  ( $\alpha$ ) thì góc giữa  $a$  và hình chiếu  $a'$  của nó trên  $(P)$  gọi là góc giữa đường thẳng  $a$  và mặt phẳng  $(P)$ .

**Chú ý:** Nếu  $\varphi$  là góc giữa đường thẳng  $d$  và mặt phẳng  $(\alpha)$  thì ta luôn có  $0^\circ \leq \varphi \leq 90^\circ$ .



## B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

1. Cho hai đường thẳng phân biệt  $a, b$  và mặt phẳng  $(\alpha)$ . Các mệnh đề sau đây đúng hay sai ?

- a) Nếu  $a // (\alpha)$  và  $b \perp (\alpha)$  thì  $a \perp b$ .
- b) Nếu  $a // (\alpha)$  và  $b \perp a$  thì  $b \perp (\alpha)$ .
- c) Nếu  $a // (\alpha)$  và  $b // (\alpha)$  thì  $b // a$ .
- d) Nếu  $a \perp (\alpha)$  và  $b \perp a$  thì  $b // (\alpha)$ .

**Trả lời:** a) Đúng; b) Sai; c) Sai; d) Sai.

2. Cho tứ diện ABCD có hai mặt ABC và BCD là hai tam giác cân có chung cạnh đáy BC. Gọi I là trung điểm của cạnh BC.

- a) Chứng minh rằng BC vuông góc với mặt phẳng (ADI).
- b) Gọi AH là đường cao của tam giác ADI, chứng minh rằng AH vuông góc với mặt phẳng (BCD).

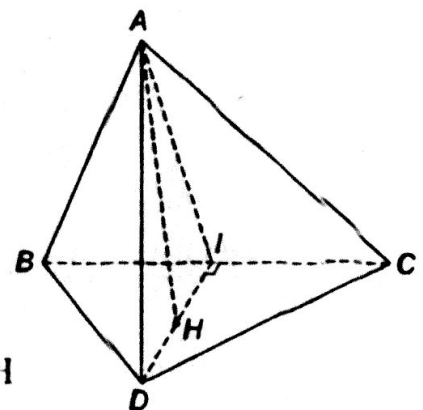
*Giải*

- a) Tam giác ABC và BCD cân có đáy BC và I là trung điểm của BC nên

$$\begin{cases} AI \perp BC \\ DI \perp BC \end{cases} \Rightarrow BC \perp (ADI)$$

- b) Ta có  $BC \perp (ADI)$  và  $AH \subset (ADI) \Rightarrow BC \perp AH$

$$\begin{cases} AH \perp BC \\ AH \perp DI \end{cases} \Rightarrow AH \perp (BCD)$$



3. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình thoi ABCD và có  $SA = SB = SC = SD$ . Gọi O là giao điểm của AC và BD. Chứng minh rằng:

- a) Đường thẳng SO vuông góc với mặt phẳng (ABCD).
- b) Đường thẳng AC vuông góc với mặt phẳng (SBD) và đường thẳng BD vuông góc với mặt phẳng (SAC).

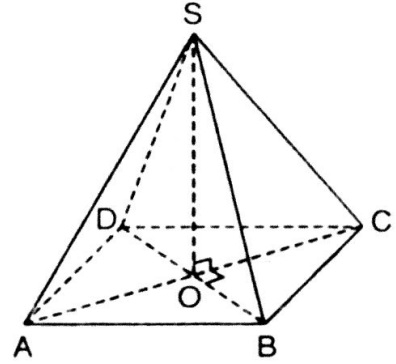
*Giải*

a)  $SO$  là đường cao của hai tam giác cân  $SAC$ ,  $SBD$  ta có:

$$\begin{cases} SO \perp AC \\ SO \perp BD \end{cases} \Rightarrow SO \perp (ABCD)$$

b) Ta có:  $\begin{cases} AC \perp BD \\ AC \perp SO \end{cases} \Rightarrow AC \perp (SBD)$

$$\begin{cases} BD \perp SO \\ BD \perp AC \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SAC)$$



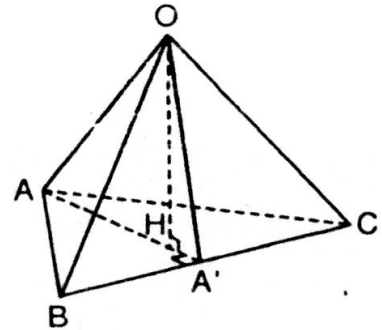
4. Cho tứ diện  $OABC$  có ba cạnh  $OA$ ,  $OB$ ,  $OC$  đôi một vuông góc. Gọi  $H$  là chân đường vuông góc hạ từ  $O$  tới mặt phẳng  $(ABC)$ . Chứng minh rằng:

a)  $H$  là trực tâm của tam giác  $ABC$ ;

b)  $\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2}$ .

*Giải*

a) Vì  $H$  là hình chiếu của điểm  $O$  trên mp $(ABC)$  nên  $OH \perp (ABC)$ . Mặt khác  $OA \perp (OBC)$  nên  $OA \perp BC$ . Vậy  $AH \perp BC$  (định lý ba đường vuông góc), tức là  $H$  thuộc một đường cao của tam giác  $ABC$ . Tương tự như trên ta cũng có  $H$  thuộc đường cao thứ hai của tam giác  $ABC$ . Vậy  $H$  là trực tâm tam giác  $ABC$ .



b) Nếu  $AH \perp BC$  tại  $A'$  thì  $BC \perp OA'$ . Vì  $OH$  là đường cao của tam giác vuông  $AOA'$  (vuông tại  $O$ ) và  $OA'$  là đường cao của tam giác vuông  $BOC$  (vuông tại  $O$ ) nên:  $\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OA'^2}$ ,  $\frac{1}{OA'^2} = \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2}$

Vậy  $\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2}$ .

5. Trên mặt phẳng  $(\alpha)$  cho hình bình hành  $ABCD$ . Gọi  $O$  là giao điểm của  $AC$  và  $BD$ ,  $S$  là một điểm nằm ngoài mặt phẳng  $(\alpha)$  sao cho  $SA = SC$ ,  $SB = SD$ . Chứng minh rằng:

a)  $SO \perp (\alpha)$ ;

b) Nếu trong mặt phẳng  $(SAB)$  kẻ  $SH$  vuông góc với  $AB$  tại  $H$  thì  $AB$  vuông góc với mặt phẳng  $(SOH)$ .

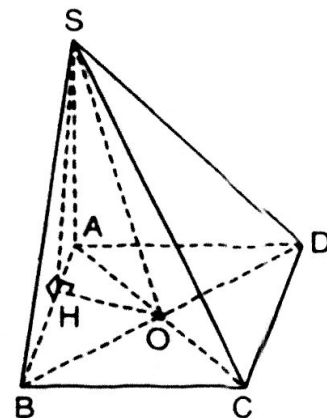
*Giải*

- a) SO là đường cao của hai tam giác cân SAC và SBD nên  $SO \perp AC$  và  $SO \perp BC$

$$\Rightarrow SO \perp (ABCD) = (\alpha)$$

- b) Vì  $SO \perp (ABCD)$  và  $AB \subset (ABCD)$  nên  $AB \perp SO$ .

$$\text{Ta có } \begin{cases} AB \perp SO \\ AB \perp SH \end{cases} \Rightarrow AB \perp (SOH).$$



6. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình thoi ABCD và có cạnh SA vuông góc với mặt phẳng (ABCD). Gọi I và K là hai điểm lần lượt lấy trên hai cạnh SB và SD sao cho  $\frac{SI}{SB} = \frac{SK}{SD}$ . Chứng minh:

- a) BD vuông góc với SC;  
b) IK vuông góc với mặt phẳng (SAC).

*Giải*

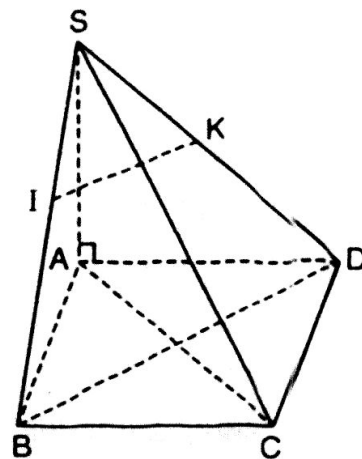
- a) ABCD là hình thoi nên:

$$AC \perp BD; SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp BD$$

$$\text{Ta có: } \begin{cases} BD \perp SA \\ BD \perp AC \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SAC).$$

$$\text{Mà } SC \subset (SAC) \text{ nên } BD \perp SC.$$

- b) Vì  $\frac{SI}{SB} = \frac{SK}{SD}$  nên  $IK \parallel BD$ . Mà  $BD \perp (SAC)$  nên  $IK \perp (SAC)$ .



7. Cho tứ diện SABC có cạnh SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) và có tam giác ABC vuông tại B. Trong mặt phẳng (SAB) kẻ AM vuông góc với SB tại M. Trên cạnh SC lấy điểm N sao cho  $\frac{SM}{SB} = \frac{SN}{SC}$ . Chứng minh rằng:

- a)  $BC \perp (SAB)$  và  $AM \perp (SBC)$ ;

- b)  $SB \perp AN$ .

*Giải*

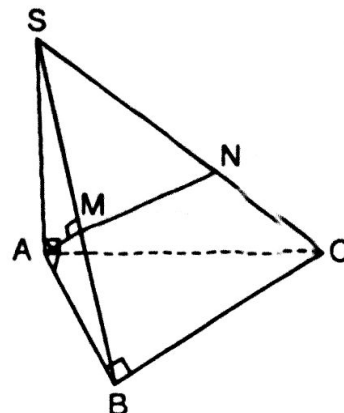
$$\text{a) Ta có } \begin{cases} BC \perp BA \\ BC \perp SA \text{ (vì } SA \perp (ABC)) \end{cases}$$

$$\Rightarrow BC \perp (SAB)$$

$$\begin{cases} BC \perp AM \\ AM \perp SB \end{cases} \Rightarrow AM \perp (SBC)$$

- b) Vì  $\frac{SM}{SB} = \frac{SN}{SC}$  nên  $MN \parallel BC$ , mà  $BC \perp (SAB)$

$$\text{nên } BC \perp SB \Rightarrow SB \perp MN.$$



$$\text{Ta có: } \begin{cases} SB \perp MN \\ SB \perp AM \end{cases} \Rightarrow SB \perp (AMN) \Rightarrow SB \perp AN$$

8. Cho điểm S không thuộc mặt phẳng  $(\alpha)$  có hình chiếu trên  $(\alpha)$  là điểm H. Với điểm M bất kì trên  $(\alpha)$  và M không trùng với H, ta gọi SM là đường xiên và đoạn HM là hình chiếu của đường xiên đó. Chứng minh rằng:

- Hai đường xiên bằng nhau khi và chỉ khi hai hình chiếu của chúng bằng nhau;
- Với hai đường xiên cho trước, đường xiên nào lớn hơn thì có hình chiếu lớn hơn và ngược lại đường xiên nào có hình chiếu lớn hơn thì lớn hơn.

*Giải*

- Giả sử HM, HN lần lượt là hình chiếu của SM, SN.

Nếu  $SM = SN$  thì  $\triangle SHM = \triangle SHN$  nên  $HM = HN$

Ngược lại nếu  $HM = HN$  thì  $\triangle SHM = \triangle SHN$  nên  $SM = SN$ .

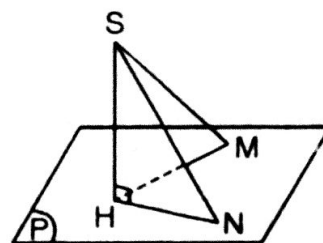
Vậy  $SM = SN \Leftrightarrow HM = HN$

- Áp dụng định Py-ta-go ta có:

$$SM^2 - HM^2 = SN^2 - HN^2 (= SH^2)$$

$$\Rightarrow SM^2 - SN^2 = HM^2 - HN^2.$$

Từ đó suy ra:  $SM > SN \Leftrightarrow HM > HN$  (đpcm).



### C. BÀI TẬP LÀM THÊM

1. Cho tứ diện ABCD.

- Chứng minh rằng  $AB \perp CD \Leftrightarrow AC^2 - AD^2 = BC^2 - BD^2$ .
- Từ đó suy ra nếu một tứ diện có hai cặp cạnh đối vuông góc với nhau thì cặp cạnh đối còn lại cũng vuông góc với nhau.

2. Cho tứ diện SABC có ABC là tam giác vuông cân đỉnh B,  $AB = a$ , SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) và  $SA = a\sqrt{3}$ . M là điểm tùy ý trên cạnh AB, đặt  $AM = x$  ( $0 < x < a$ ). Gọi  $(\alpha)$  là mặt phẳng qua M và vuông góc với AB.

- Tìm thiết diện của tứ diện SABC với  $(\alpha)$ .
- Tính diện tích thiết diện này theo a và x. Tìm x để diện tích thiết diện có giá trị lớn nhất.

Đáp số: b)  $S = \sqrt{3}x(a - x)$ , S lớn nhất khi  $x = \frac{a}{2}$ .

3. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình vuông ABCD cạnh a,  $SA \perp (ABCD)$  và  $SA = a$ .

- Tìm trên mặt phẳng (ABCD) một điểm cách đều ba điểm S, B, C và tính khoảng cách từ điểm đó đến mặt phẳng (SBC).



b) Tìm trên mặt phẳng (SBC) một điểm cách đều ba điểm B, C, M với M là trung điểm cạnh CD. Tính khoảng cách chung ấy.

Đáp số: a) Trung điểm N của cạnh AD và có độ dài  $SN = BN = CN = \frac{a\sqrt{5}}{2}$ .

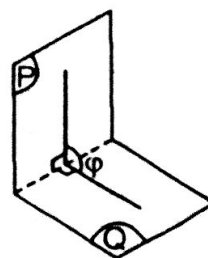
b)  $\frac{a\sqrt{6}}{4}$

## §4. HAI MẶT PHẪNG VUÔNG GÓC

### A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

#### 1. Góc giữa hai mặt phẳng

**Định nghĩa:** Góc giữa hai mặt phẳng là góc giữa hai đường thẳng lần lượt vuông góc với hai mặt phẳng đó.



**Định lý:** Gọi S là diện tích của đa giác H trong mặt phẳng (P) và S' là diện tích hình chiếu H' của H trên mặt phẳng (P') thì  $S' = S \cos \varphi$ , trong đó  $\varphi$  là góc giữa hai mặt phẳng (P) và (P').

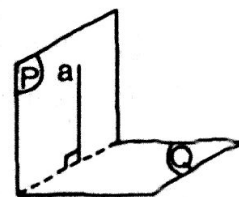
#### 2. Hai mặt phẳng vuông góc

**Định nghĩa:** Hai mặt phẳng gọi là vuông góc với nhau nếu góc giữa chúng bằng  $90^\circ$ . Kí hiệu  $(P) \perp (Q)$ .

**Định lý (Điều kiện để hai mặt phẳng vuông góc)**

Nếu một mặt phẳng chứa một đường thẳng vuông góc với một mặt phẳng khác thì hai mặt phẳng đó vuông góc với nhau.

$$\begin{cases} a \subset (P) \\ a \perp (Q) \end{cases} \Rightarrow (P) \perp (Q)$$

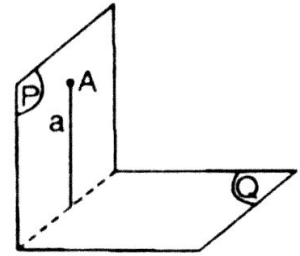


**Định lý:** Nếu hai mặt phẳng (P) và (Q) vuông góc với nhau thì bất cứ đường thẳng nào nằm trong mặt phẳng (P), vuông góc với giao tuyến của (P) và (Q) đều vuông góc với mặt phẳng (Q).

$$\begin{cases} (P) \cap (Q) = d; (P) \perp (Q) \\ a \subset (P) \\ a \perp d \end{cases} \Rightarrow a \perp (Q)$$

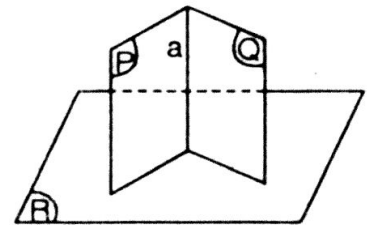
**Hệ quả 1:** Nếu hai mặt phẳng (P) và (Q) vuông góc với nhau và A là một điểm nằm trong (P) thì đường thẳng a đi qua điểm A và vuông góc với (Q) sẽ nằm trong (P).

$$\begin{cases} (P) \perp (Q) \\ A \in (P) \\ a \perp (Q) \\ A \in a \end{cases} \Rightarrow a \subset (P)$$



**Hệ quả 2:** Nếu hai mặt phẳng cắt nhau và cùng vuông góc với mặt phẳng thứ ba thì giao tuyến của chúng vuông góc với mặt phẳng thứ ba.

$$\begin{cases} (P) \cap (Q) = a \\ (P) \perp (R) \\ (Q) \perp (R) \end{cases} \Rightarrow a \perp (R)$$



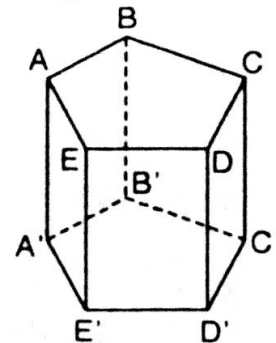
**Hệ quả 3:** Qua đường thẳng 'a' không vuông góc với mặt phẳng (P) có duy nhất một mặt phẳng (Q) vuông góc với mặt phẳng (P).

### 3. Hình lăng trụ đứng, hình hộp chữ nhật, hình lập phương

**Định nghĩa:**

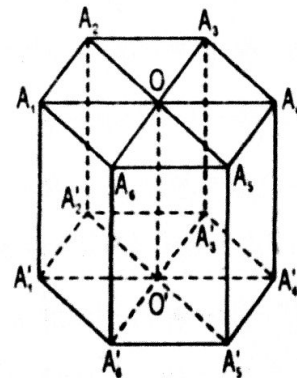
**Hình lăng trụ đứng:**

Là hình lăng trụ có cạnh bên vuông góc với mặt phẳng đáy.



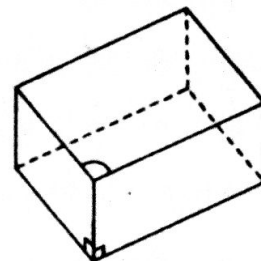
**Hình lăng trụ đều:**

Là hình lăng trụ đứng có đáy là đa giác đều.



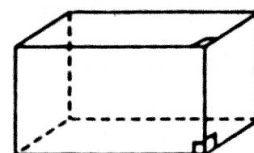
**Hình hộp đứng:**

Là hình lăng trụ đứng có đáy là hình bình hành.



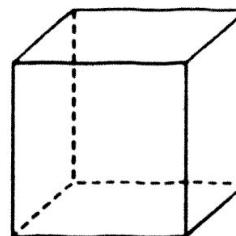
**Hình hộp chữ nhật:**

Là hình hộp đứng có đáy là hình chữ nhật.



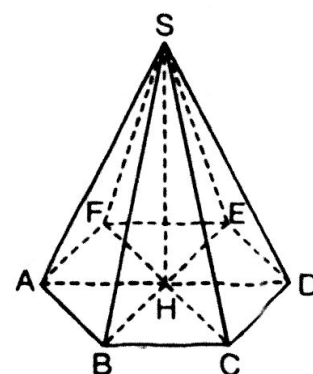
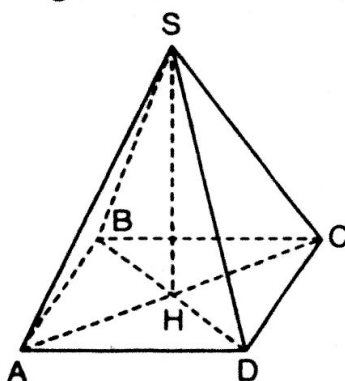
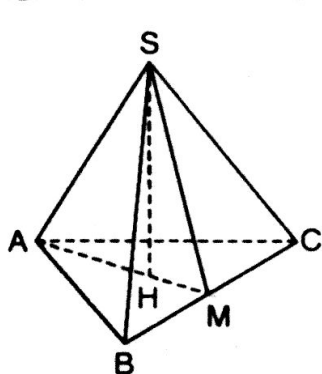
*Hình lập phương:*

Là hình hộp chữ nhật có tất cả các cạnh bằng nhau.

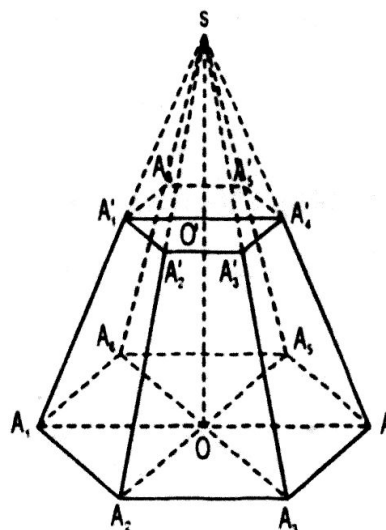


#### 4. Hình chóp đều và hình chóp cắt đều

*Định nghĩa:* Một hình chóp được gọi là hình chóp đều nếu đáy của nó là đa giác đều và các cạnh bên bằng nhau.



*Định nghĩa:* Khi cắt hình chóp đều bởi một mặt phẳng song song với đáy để được một hình chóp cắt thì hình chóp cắt đó được gọi là hình chóp cắt đều.



## B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

1. Cho ba mặt phẳng  $(\alpha)$ ,  $(\beta)$ ,  $(\gamma)$ , những mệnh đề nào sau đây đúng ?

- a) Nếu  $(\alpha) \perp (\beta)$  và  $(\alpha) \parallel (\gamma)$  thì  $(\beta) \perp (\gamma)$ .
- b) Nếu  $(\alpha) \perp (\beta)$  và  $(\alpha) \perp (\gamma)$  thì  $(\beta) \parallel (\gamma)$ .

*Trả lời:* a) Đúng; b) Sai.

2. Cho hai mặt phẳng  $(\alpha)$  và  $(\beta)$  vuông góc với nhau. Người ta lấy trên giao tuyến  $\Delta$  của hai mặt phẳng đó hai điểm A và B sao cho  $AB = 8$  cm. Gọi C là một điểm trên  $(\alpha)$  và D là một điểm trên  $(\beta)$  sao cho AC và BD cùng vuông góc với giao tuyến  $\Delta$  và  $AC = 6$  cm,  $BD = 24$  cm. Tính độ dài đoạn CD.

*Giải*

$(\alpha) \perp (\beta)$  và  $CA \perp \Delta \Rightarrow CA \perp (\beta)$

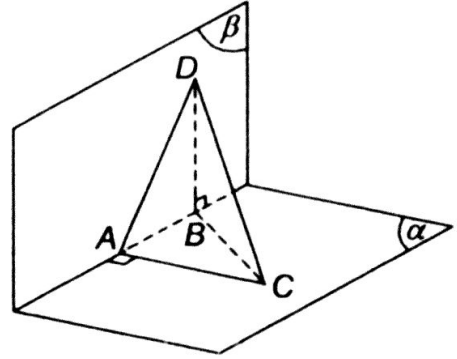
$\Rightarrow CA \perp DA$  nên  $\Delta ADC$  vuông ở A.

$DB \perp \Delta$

$\Rightarrow DB \perp AB \Rightarrow \Delta BAD$  vuông ở B.

$$\begin{aligned} \text{Do đó: } CD^2 &= AD^2 + AC^2 = BD^2 + AB^2 + AC^2 \\ &= 24^2 + 8^2 + 6^2 = 676 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow CD = 26 \text{ (cm)}.$$



3. Trong mặt phẳng  $(\alpha)$  cho tam giác ABC vuông ở B. Một đoạn thẳng AD vuông góc với  $(\alpha)$  tại A. Chứng minh rằng:

a)  $\widehat{ABD}$  là góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (DBC).

b) Mặt phẳng (ABD) vuông góc với mặt phẳng (BCD).

c) HK // BC với H và K lần lượt là giao điểm của DB và DC với mặt phẳng (P) đi qua A và vuông góc với DB.

*Giải*

a) Ta có:  $AD \perp (ABC) \Rightarrow AD \perp BC$ ,

mà  $BC \perp AB$  nên  $BC \perp (ABD) \Rightarrow BC \perp BD$ .

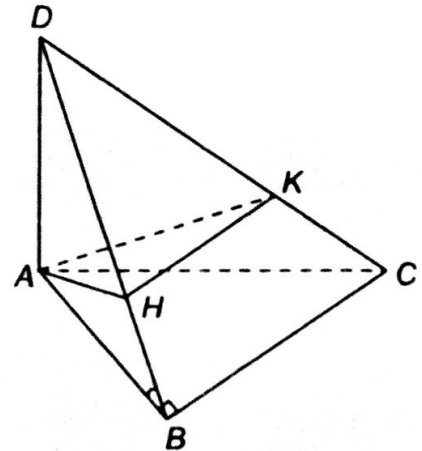
Ta có:  $\begin{cases} AB \perp BC \\ BD \perp BC \end{cases} \Rightarrow \widehat{ABD}$  là

góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (DBC).

b) Vì  $BC \perp (ABD)$  nên  $(BCD) \perp (ABD)$ .

c)  $DB \perp (AHK)$  tại H nên  $DB \perp HK$ .

Trong mặt phẳng (BCD) ta có  $HK \perp BD$  và  $BC \perp BD$  do đó  $HK \parallel BC$ .



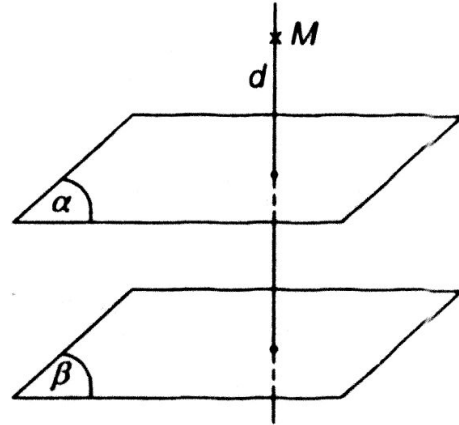
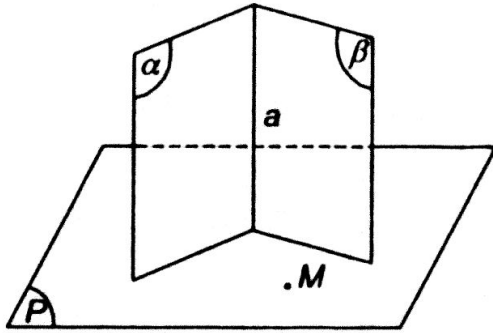
4. Cho hai mặt phẳng  $(\alpha)$ ,  $(\beta)$  cắt nhau và một điểm M không thuộc  $(\alpha)$  và không thuộc  $(\beta)$ . Chứng minh rằng qua điểm M có một và chỉ một mặt phẳng (P) vuông góc với  $(\alpha)$  và  $(\beta)$ . Nếu  $(\alpha)$  song song với  $(\beta)$  thì kết quả trên sẽ thay đổi như thế nào ?

*Giải*

Gọi  $a = (\alpha) \cap (\beta)$ . Gọi (P) là mặt phẳng đi qua M và vuông góc với a.

Vì  $a \subset (\alpha)$  và  $a \perp (P)$  nên  $(P) \perp (\alpha)$ . Tương tự ta chứng minh được  $(P) \perp (\beta)$ .

Như vậy qua điểm M có mặt phẳng (P) vuông góc với  $(\alpha)$  và  $(\beta)$ .



Ngược lại nếu có mặt phẳng (P) đi qua điểm M và (P) vuông góc với  $(\alpha)$  và  $(\beta)$  thì ta suy ra  $(P) \perp a$ . Do tính duy nhất của mặt phẳng đi qua một điểm M và vuông góc với đường thẳng a nên mặt phẳng (P) là duy nhất.

Nếu  $(\alpha) \parallel (\beta)$ , ta gọi d là đường thẳng đi qua M và vuông góc với  $(\alpha)$ . Khi đó ta có  $d \perp (\beta)$  và mọi mặt phẳng (P) chứa d đều vuông góc với  $(\alpha)$  và  $(\beta)$ . Vậy khi  $(\alpha) \parallel (\beta)$  có vô số mặt phẳng (P) đi qua M và vuông góc với  $(\alpha)$  và  $(\beta)$ .

5. Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D'. Chứng minh rằng:

- Mặt phẳng (AB'C'D) vuông góc với mặt phẳng (BCD'A').
- Đường thẳng AC' vuông góc với mặt phẳng (A'BD).

*Giải*

- Ta có  $AB' \perp A'B$  (hai đường chéo hình vuông)

$$AB' \perp BC \text{ (vì } BC \perp (ABB'A'))$$

$$\Rightarrow AB' \perp (BCD'A')$$

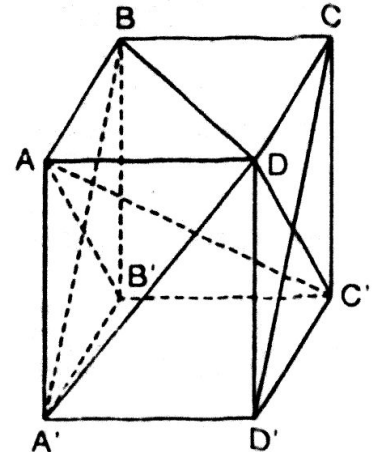
$$\text{Mà } AB' \subset (AB'C'D) \text{ nên } (AB'C'D) \perp (BCD'A')$$

- Ta có  $\begin{cases} A'B \perp AB' \\ A'B \perp B'C' \end{cases} \Rightarrow A'B \perp (ADC'B')$

$$\text{Mà } AC' \subset (ABC'B') \text{ nên } AC' \perp A'B \quad (1)$$

$$\text{Tương tự } A'D \perp (ABC'D') \Rightarrow A'D \perp AC' \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) suy ra } AC' \perp (A'BD).$$



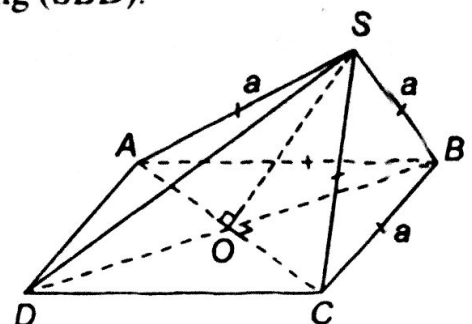
6. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là một hình thoi cạnh a và có  $SA = SB = SC = a$ . Chứng minh rằng:

- Mặt phẳng (ABCD) vuông góc với mặt phẳng (SBD).
- Tam giác SBD là tam giác vuông.

*Giải*

- Gọi O là tâm hình thoi ABCD.

$$\text{Ta có: } \begin{cases} AC \perp BD \\ AC \perp SO \end{cases}$$



$$\Rightarrow AC \perp (SBD)$$

$$\Rightarrow (ABCD) \perp (SBD)$$

b) Vì  $SA = SB = SC = a$  và  $AB = BC = a$  nên ba tam giác  $SAC$ ,  $BAC$ ,  $DAC$  cân và bằng nhau. Do đó  $OS = OB = OD$ .

Từ đó suy ra  $SBD$  là tam giác vuông tại  $S$ .

7. Cho hình hộp chữ nhật  $ABCD.A'B'C'D'$  có  $AB = a$ ,  $BC = b$ ,  $CC' = c$ .

a) Chứng minh rằng mặt phẳng  $(ADC'B')$  vuông góc với mặt phẳng  $(ABB'A')$ .

b) Tính độ dài đường chéo  $AC'$  theo  $a$ ,  $b$ ,  $c$ .

*Giải*

$$\left. \begin{array}{l} \text{a) Vì } AD \perp AB \\ AD \perp AA' \end{array} \right\} \Rightarrow AD \perp (ABB'A')$$

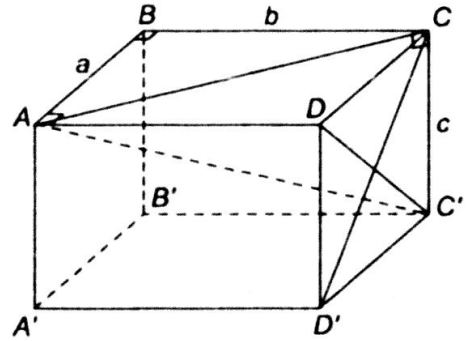
Mặt phẳng  $(ADC'B')$  chứa  $AD$  nên  
ta suy ra  $(ADC'B') \perp (ABB'A')$

b) Ta có  $AC'^2 = AC^2 + CC'^2$  ( $\Delta ACC'$  vuông)

$$AC'^2 = AB^2 + BC^2 + CC'^2 \text{ (}\Delta ABC \text{ vuông)}$$

$$AC'^2 = a^2 + b^2 + c^2.$$

$$\text{Vậy } AC' = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}.$$



8. Tính độ dài đường chéo của một hình lập phương cạnh  $a$ .

*Giải*

Áp dụng kết quả bài 7b với  $a = b = c$  ta có độ dài đường chéo hình lập phương  $AC' = \sqrt{3a^2} = a\sqrt{3}$

9. Cho hình chóp tam giác đều  $S.ABC$  có  $SH$  là đường cao. Chứng minh  $SA \perp BC$  và  $SB \perp AC$ .

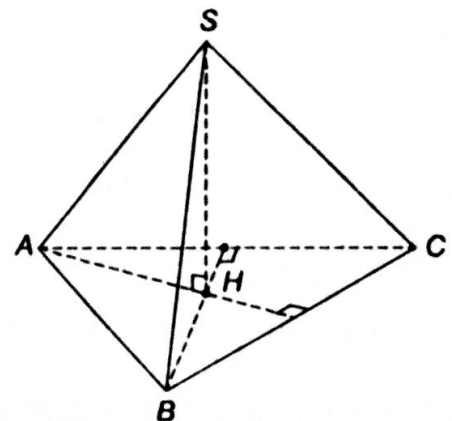
*Giải*

Vì  $H$  là tâm của tam giác đều nên ta có:

$$BC \perp AH \text{ và } BC \perp SH.$$

$$\text{Ta có: } \left. \begin{array}{l} BC \perp AH \\ BC \perp SH \end{array} \right\} \Rightarrow BC \perp (SAH) \Rightarrow BC \perp SA$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Tương tự ta có } AC \perp BH \\ \text{và } AC \perp SH \end{array} \right\} \Rightarrow AC \perp (SBH) \Rightarrow AC \perp SB.$$



10. Cho hình chóp tứ giác đều  $S.ABCD$  có các cạnh bên và các cạnh đáy đều bằng  $a$ . Gọi  $O$  là tâm của hình vuông  $ABCD$ .

- Tính độ dài đoạn thẳng SO.
- Gọi M là trung điểm của đoạn SC. Chứng minh hai mặt phẳng (MED) và (SAC) vuông góc với nhau.
- Tính độ dài đoạn OM và tính góc giữa hai mặt phẳng (MBD) và (AECĐ).

**Giải**

- Ta có tứ giác ABCD là hình vuông có cạnh bằng a và  $SO \perp (ABCD)$ . Do đó:

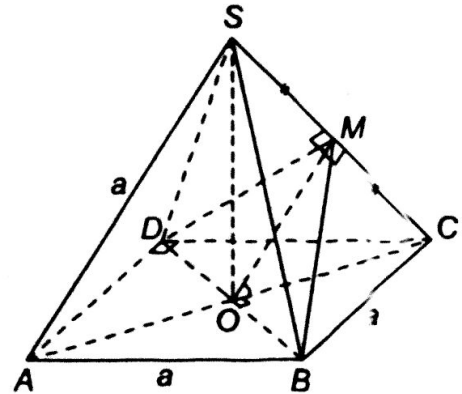
$$SO^2 = SA^2 - OA^2 = a^2 - \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{2}$$

$$\Rightarrow SO = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

- SBC là tam giác đều cạnh a nên  $BM \perp SC$ ,  
tương tự  $DM \perp SC$

$$\left. \begin{array}{l} BM \perp SC \\ DM \perp SC \end{array} \right\} \Rightarrow SC \perp (BDM)$$

Do đó  $(SAC) \perp (BDM)$ .



- $OM^2 = OC^2 - MC^2$  vì OMC là tam giác vuông tại M.

$$OM^2 = \frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{4} = \frac{a^2}{4}. \text{ Vậy } OM = \frac{a}{2}.$$

Vì  $MO \perp BD$  và  $CO \perp BD$  với BD là giao tuyến của (MBD) và (ABCD) nên  $\widehat{MOC}$  là góc giữa hai mặt phẳng (MBD) và (ABCD).

Tam giác MOC là vuông tại M nên:

$$\sin \widehat{MOC} = \frac{MC}{OC} = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{a\sqrt{2}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \widehat{MOC} = 45^\circ$$

Vậy góc giữa hai mặt phẳng (MBD) và (ABCD) bằng  $45^\circ$ .

- 11.** Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là một hình thoi tâm I cạnh a và có góc A bằng  $60^\circ$ , cạnh  $SC = \frac{a\sqrt{6}}{2}$  và SC vuông góc với mặt phẳng (ABCD).

- Chứng minh mặt phẳng (SBD) vuông góc với mặt phẳng (SAC).
- Trong tam giác SCA kẻ IK vuông góc với SA tại K. Hãy tính độ dài IK.
- Chứng minh  $\widehat{BKD} = 90^\circ$  và từ đó suy ra mặt phẳng (SAB) vuông góc với mặt phẳng (SAD).



### Giải

- a) Vì  $BD \perp AC$  và  $BD \perp SC$  nên  $BD \perp (SAC)$ . Ta suy ra  $(SBD) \perp (SAC)$ .
- b) Hình thoi  $ABCD$  được tạo thành bởi hai tam giác đều chung đáy. Hai tam giác vuông  $SCA$  và  $IKA$  có chung góc  $A$  nên đồng dạng, ta có:

$$\frac{IK}{SC} = \frac{AI}{AS} \quad (1)$$

Theo định lí Py-ta-go ta có:

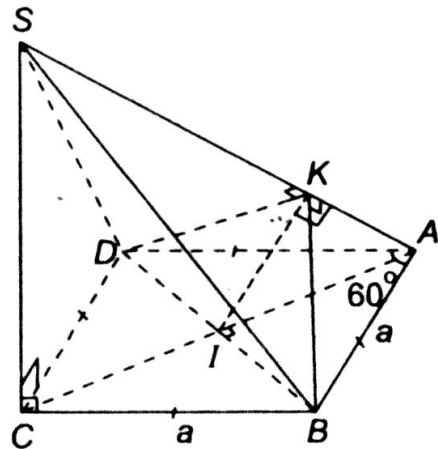
$$SA^2 = SC^2 + CA^2 = \frac{6a^2}{4} + (a\sqrt{3})^2 = \frac{18a^2}{4} \Rightarrow SA = \frac{3\sqrt{2}}{2}a \text{ thay vào (1)}$$

$$\text{ta được } IK = \frac{SC \cdot AI}{SA} = \frac{\frac{a\sqrt{6}}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}}{\frac{3\sqrt{2}}{2}a} = \frac{a}{2}.$$

- c) Vì  $IK = IB = ID = \frac{a}{2}$  nên  $\triangle BKD$  là tam giác vuông tại  $K$  hay  $\widehat{BKD} = 90^\circ$ .

$$\left. \begin{array}{l} SA \perp DB \\ SA \perp IK \end{array} \right\} \Rightarrow SA \perp (BDK) \Rightarrow SA \perp BK \text{ và } SA \perp DK.$$

Vậy  $\widehat{BKD}$  là góc giữa hai mặt phẳng  $(SAB)$  và  $(SAD)$  và  $\widehat{BKD} = 90^\circ$  nên ta suy ra  $(SAB) \perp (SAD)$ .



### C. BÀI TẬP LÀM THÊM

- Cho tam giác  $ABC$  vuông cân đỉnh  $B$  và  $AB = a$ , đoạn  $SA$  vuông góc với  $(ABC)$  và  $SA = a\sqrt{3}$ . Gọi  $E$  và  $F$  lần lượt là trung điểm của  $SC$  và  $SB$ ,  $M$  là một điểm trên đoạn  $AB$ . Đặt  $AM = x$  ( $0 \leq x \leq a$ ). Gọi  $\alpha$  là mặt phẳng chứa  $EM$  và vuông góc với  $(SAB)$ .
  - Hãy xác định mặt phẳng  $\alpha$  và thiết diện của tứ diện  $SABC$  với  $\alpha$ .
  - Chứng minh  $FM = \sqrt{x^2 - ax + a^2}$ . Tính diện tích của thiết diện theo  $a$  và  $x$ .
- Cho tam giác đều  $ABC$  cạnh  $a$ ,  $I$  là trung điểm của  $BC$ ,  $D$  là điểm đối xứng của  $A$  qua  $I$ . Dựng đoạn  $SD = \frac{a\sqrt{6}}{2}$  vuông góc với  $(ABC)$ .

Chứng minh:

- a)  $mp(SAB) \perp mp(SAC)$

b)  $mp(SBC) \perp mp(SAD)$

3. Cho hai tam giác  $ACD$  và  $BCD$  nằm trong hai mặt phẳng vuông góc với nhau,  $AC = AD = BC = a$  và  $CD = 2x$ . Gọi  $I$  và  $J$  lần lượt là trung điểm của  $AB$  và  $CD$ .

a) Chứng minh rằng  $IJ$  vuông góc với  $AB$  và  $IJ$  vuông góc với  $CD$ .

b) Tính  $AB$  và  $IJ$  theo  $a$  và  $x$ .

c) Xác định  $x$  sao cho  $(ABC)$  vuông góc với  $(ABD)$ .

## §5. KHOẢNG CÁCH

### A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

#### 1. Định nghĩa 1

Khoảng cách từ điểm  $M$  đến mặt phẳng  $(P)$  (hoặc đến đường thẳng  $\Delta$ ) là khoảng cách giữa hai điểm  $M$  và  $H$  trong đó  $H$  là hình chiếu của điểm  $M$  trên mặt phẳng  $(P)$  (hoặc trên đường thẳng  $\Delta$ ).

#### 2. Định nghĩa 2

Khoảng cách giữa đường thẳng  $a$  và mặt phẳng  $(P)$  song song với  $a$  là khoảng cách từ một điểm nào đó của  $a$  đến mặt phẳng  $(P)$ .

#### 3. Định nghĩa 3

Khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song là khoảng cách từ một điểm bất kì của mặt phẳng này đến mặt phẳng kia.

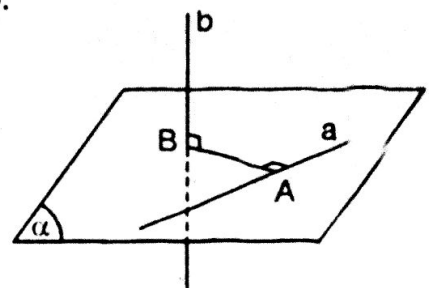
#### 4. Định nghĩa 4

Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau là độ dài đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng đó.

**\* Cách tính khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau**

a) Giả sử  $a$  và  $b$  là hai đường chéo nhau và  $a \perp b$ .

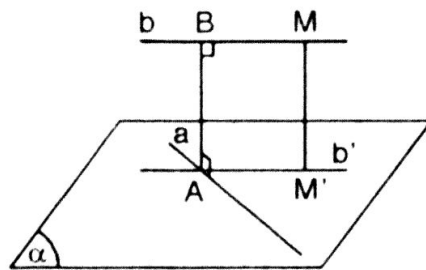
- Ta dựng mặt phẳng  $(\alpha)$  chứa  $a$  và vuông góc với  $b$  tại  $B$ .
- Trong  $(\alpha)$  dựng  $BA \perp a$  tại  $A$ , ta được độ dài đoạn  $AB$  là khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau  $a$  và  $b$ .



b) Giả sử  $a$  và  $b$  là hai đường thẳng chéo nhau nhưng không vuông góc với nhau.

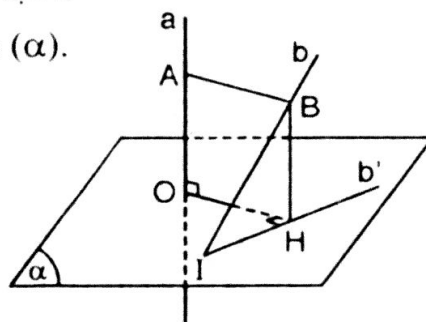
Cách 1:

- Ta dựng mặt phẳng  $(\alpha)$  chứa  $a$  và song song với  $b$ .
- Lấy một điểm  $M$  tùy ý trên  $b$  dựng  $MM' \perp (\alpha)$  tại  $M'$ .
- Từ  $M'$  dựng  $b' \parallel b$  cắt  $a$  tại  $A$ .
- Từ  $A$  dựng  $AB \parallel MM'$  cắt  $b$  tại  $B$ , độ dài đoạn  $AB$  là khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau  $a$  và  $b$ .



Cách 2:

- Ta dựng mặt phẳng  $(\alpha) \perp a$  tại  $O$ ,  $(\alpha)$  cắt  $b$  tại  $I$ .
- Dựng hình chiếu vuông góc của  $b$  là  $b'$  trên  $(\alpha)$ .
- Trong mặt phẳng  $(\alpha)$ , vẽ  $OH \perp b'$ ,  $H \in b'$ .
- Từ  $H$  dựng đường thẳng song song với  $a$  cắt  $b$  tại  $B$ .
- Từ  $B$  dựng đường thẳng song song với  $OH$  cắt  $a$  tại  $A$ .



Độ dài đoạn  $AB$  là khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau  $a$  và  $b$ .

## B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

1. Trong các mệnh đề sau đây mệnh đề nào là đúng ?

- Đường thẳng  $\Delta$  là đường vuông góc chung của hai đường thẳng  $a$  và  $b$  nếu  $\Delta$  vuông góc với  $a$  và  $\Delta$  vuông góc với  $b$ .
- Gọi  $(P)$  là mặt phẳng song song với cả hai đường thẳng  $a, b$  chéo nhau. Khi đó đường vuông góc chung  $\Delta$  của  $a$  và  $b$  luôn luôn vuông góc với  $(P)$ .
- Gọi  $\Delta$  là đường vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau  $a$  và  $b$  thì  $\Delta$  là giao tuyến của hai mặt phẳng  $(a, \Delta)$  và  $(b, \Delta)$ .
- Cho hai đường thẳng chéo nhau  $a$  và  $b$ . Đường thẳng nào đi qua một điểm  $M$  trên  $a$  đồng thời cắt  $b$  tại  $N$  và vuông góc với  $b$  thì đó là đường vuông góc chung của  $a$  và  $b$ .
- Đường vuông góc chung  $\Delta$  của hai đường thẳng chéo nhau  $a$  và  $b$  nằm trong mặt phẳng chứa đường này và vuông góc với đường kia.

Trả lời: a) Sai; b) Đúng; c) Đúng; d) Sai; e) Sai.

2. Cho tứ diện  $S.ABC$  có  $SA$  vuông góc với mặt phẳng  $(ABC)$ . Gọi  $H, K$  lần lượt là trực tâm của các tam giác  $ABC$  và  $SBC$ .

- Chứng minh ba đường thẳng  $AH, SK, BC$  đồng quy.

- b) Chứng minh rằng SC vuông góc với mặt phẳng (BHK) và HK vuông góc với mặt phẳng (SBC).  
 c) Xác định đường vuông góc chung của BC và SA.

*Giải*

- a) Gọi E là giao điểm của AH và BC.

Ta có  $SA \perp (ABC) \Rightarrow SA \perp BC$ .

$$\begin{cases} BC \perp AE \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAE) \Rightarrow BC \perp SE.$$

Vậy ba đường thẳng AH, SK, BC đồng quy tại E.

- b) Ta có:  $\begin{cases} SA \perp BH \\ AC \perp BH \end{cases} \Rightarrow BH \perp (SAC) \Rightarrow BH \perp SC$

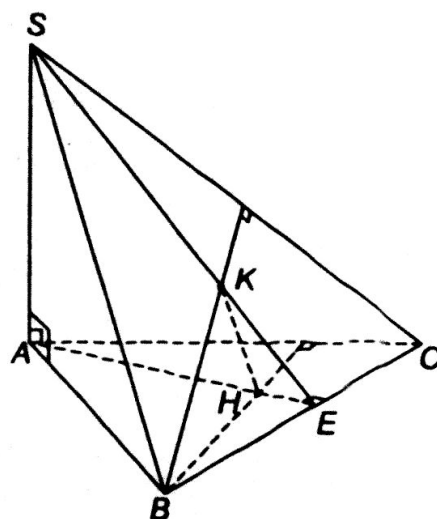
$$\text{Ta có } \begin{cases} SC \perp BH \\ SC \perp BK \end{cases} \Rightarrow SC \perp (BHK).$$

$$SC \perp (BHK) \Rightarrow SC \perp HK; BC \perp (SAE) \Rightarrow BC \perp HK$$

$$\text{Từ } \begin{cases} HK \perp SC \\ HK \perp BC \end{cases} \Rightarrow HK \perp (SBC)$$

- c) Ta có  $AE \perp SA$  và  $AE \perp BC$

nên AE là đường vuông góc chung của SA và BC.



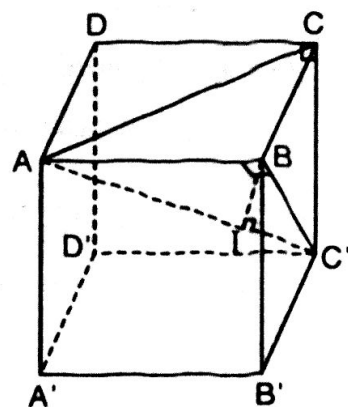
3. Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' cạnh a. Chứng minh rằng các khoảng cách từ các điểm B, C, D, A', B', D' đến đường chéo AC' đều bằng nhau. Tính khoảng cách đó.

*Giải*

ABC' là tam giác vuông tại B có  $AB = a$  và  $BC' = a\sqrt{2}$ . Độ dài đường cao BI là khoảng cách từ B tới đường thẳng AC'. Do đó:

$$\frac{1}{BI^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{BC'^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{2a^2} = \frac{3}{2a^2}$$

$$\Rightarrow BI = a\sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{a\sqrt{6}}{3}$$



Khoảng cách từ các điểm B, C, D, A', B', D' đến đường chéo AC' đều bằng nhau vì chúng đều là độ dài đường cao của các tam giác vuông bằng nhau (vì có hai cạnh góc vuông tương ứng bằng nhau).

4. Cho hình hộp chữ nhật ABCD.A'B'C'D' có AB = a, BC = b, CC' = c.

- Tính khoảng cách từ B đến mặt phẳng (ACC'A').
- Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng BB' và AC'.

*Giải*

- Trong mặt phẳng (ABCD) kẻ BH ⊥ AC tại H thì BH ⊥ (ACC'A').

(vì BH ⊥ AC và BH ⊥ CC').

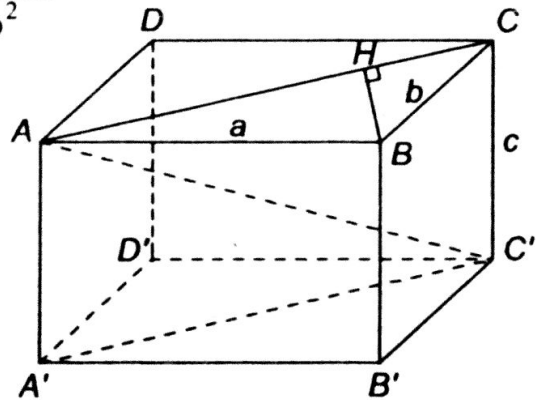
Khi đó BH là khoảng cách từ B tới mặt phẳng (ACC'A'). Xét tam giác vuông ABC ta có:

$$\frac{1}{BH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{BC^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = \frac{a^2 + b^2}{a^2 b^2}.$$

$$\Rightarrow BH = \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

- Mặt phẳng (ACC'A') chứa AC' và song song với BB' nên khoảng cách giữa BB' và AC' chính là

$$\text{khoảng cách } BH = \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$



5. Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D'

- Chứng minh rằng B'D vuông góc với mặt phẳng (BA'C').
- Tính khoảng cách giữa hai mặt phẳng (BA'C') và (ACD').
- Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng BC' và CD'.

*Giải*

$$\text{a) Ta có: } \begin{cases} A'C' \perp B'D' \\ A'C' \perp DD' \end{cases} \Rightarrow A'C' \perp (BB'D'D) \Rightarrow A'C' \perp DB'$$

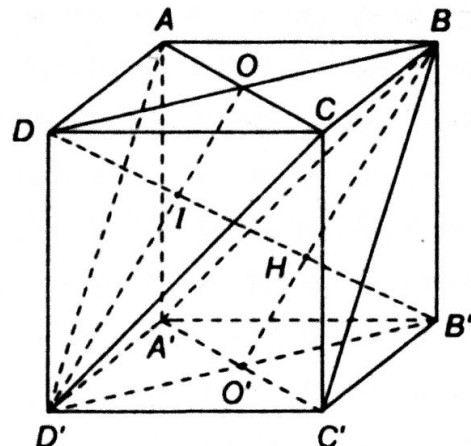
$$\begin{cases} BC' \perp B'C \\ BC' \perp DC \end{cases} \Rightarrow BC' \perp (DCB'A') \Rightarrow BC' \perp DB'$$

$$\text{Từ } \begin{cases} DB' \perp A'C' \\ DB' \perp BC' \end{cases} \Rightarrow DB' \perp (BA'C')$$

- Hai mặt phẳng (BA'C') và (ACD') có

$$\begin{cases} BC' \parallel AD' \\ A'C' \parallel AC \end{cases} \Rightarrow (BA'C') \parallel (ACD')$$

Gọi I và H lần lượt là giao điểm của DB' với D'O và BO'. Trong hình chữ nhật DBB'D' ta có



$$DI = \frac{1}{2} IB' \text{ và } B'H = \frac{1}{2} DH \text{ nên } DI = IH = HB' = \frac{1}{3} DB' \Rightarrow IH = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

Vậy khoảng cách giữa hai mặt phẳng  $(BA'C')$  và  $(ACD')$  là  $\frac{a\sqrt{3}}{3}$ .

- c) Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau  $BC'$  và  $CD'$  bằng khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song  $(BA'C')$  và  $(ACD')$  lần lượt chứa hai đường thẳng chéo nhau đó. Ta suy ra khoảng cách giữa hai đường thẳng

$$BC' \text{ và } CD' \text{ là } d = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

6. Chứng minh rằng nếu đường thẳng nối trung điểm hai cạnh  $AB$  và  $CD$  của tứ diện  $ABCD$  là đường vuông góc chung của  $AB$  và  $CD$  thì  $AC = BD$  và  $AD = BC$ .

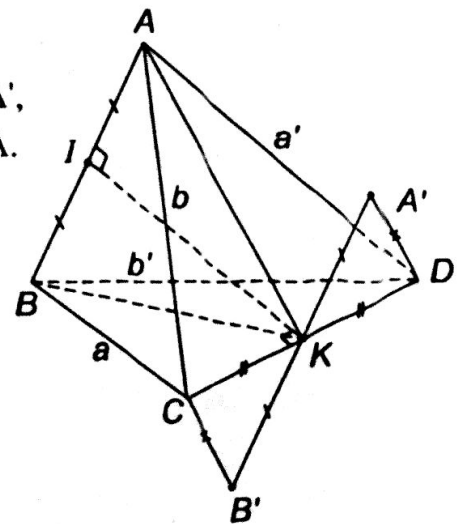
*Giải*

Gọi  $I, K$  lần lượt là trung điểm của cạnh  $AB$  và  $CD$ . Qua  $K$  kẻ đường thẳng  $d \parallel AB$ , trên  $d$  lấy  $A', B'$  sao cho  $K$  là trung điểm của  $A'B'$  và  $KA' = IA$ .

Ta có  $B'C = A'D$  (vì  $\triangle KB'C = \triangle KA'D$ ).

Vì  $BB' \parallel AA' \parallel IK$  mà  $IK$  là đường vuông góc chung của  $AB$  và  $CD$  nên  $BB' \perp B'C$  và  $AA' \perp A'D$ . Hai tam giác vuông  $BCB'$  và  $ADA'$  có  $BB' = AA'$  và  $CB' = A'D$  nên ta suy ra  $AD = BC$ .

Chứng minh tương tự ta có  $AC = BD$ .



7. Cho hình chóp tam giác đều  $S.ABC$  có cạnh đáy bằng  $3a$ , cạnh bên bằng  $2a$ . Tính khoảng cách từ  $S$  tới mặt đáy  $(ABC)$ .

*Giải*

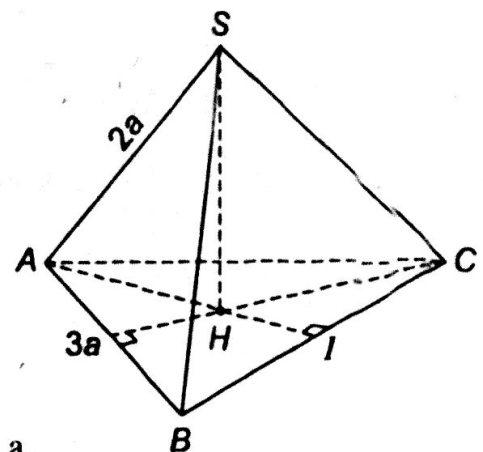
Gọi  $H$  là tâm của tam giác đều  $ABC$ .

Khoảng cách từ  $S$  tới  $mp(ABC)$  bằng độ dài đường cao  $SH$  của hình chóp.

Gọi  $I$  là giao điểm  $AH$  và  $BC$

$$AH = \frac{2}{3} AI = \frac{2}{3} \cdot 3a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}.$$

$$SH^2 = SA^2 - AH^2 = 4a^2 - 3a^2 = a^2 \Rightarrow SH = a.$$



8. Cho tứ diện đều  $ABCD$  cạnh  $a$ . Tính khoảng cách giữa hai cạnh đối của tứ diện đều đó.

### Giải

Gọi I và K lần lượt là các trung điểm của BC và AD.

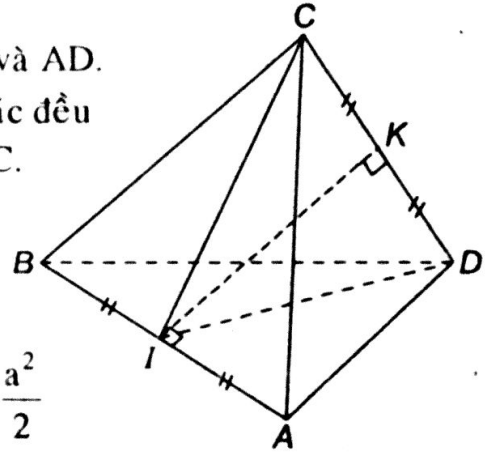
Ta có  $IA = ID$  (hai trung tuyến của hai tam giác đều bằng nhau), do đó  $IK \perp AD$ . Tương tự  $IK \perp BC$ .

Vậy IK là đường vuông góc chung của hai cạnh đối diện AD và BC của tứ diện đều.

Tam giác AIK vuông tại K nên:

$$IK^2 = AI^2 - AK^2 = \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{2a^2}{4} = \frac{a^2}{2}$$

$$\Rightarrow AK = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$



### C. BÀI TẬP LÀM THÊM

- Trong hai mặt phẳng vuông góc (P) và (Q) cho hai tam giác cân ACD và BCD có chung đáy  $CD = 2x$  và các cạnh khác có độ dài  $a$ . Gọi M và N là trung điểm của AB và CD.
  - Chứng minh rằng MN là đường vuông góc chung của AB và CD.
  - Tính theo  $a$  và  $x$  độ dài các đoạn AB và MN.
- Tứ diện OABC có  $OA = OB = OC = a$  và  $\widehat{AOB} = \widehat{AOC} = 60^\circ$ ;  $\widehat{BOC} = 90^\circ$ .
  - Tính độ dài các cạnh còn lại của tứ diện và chứng minh rằng ABC là tam giác vuông.
  - Chứng minh  $OA \perp BC$ , gọi I, J lần lượt là trung điểm của OA và BC, chứng minh rằng IJ là đường vuông góc chung của OA và BC.
  - Chứng minh rằng  $(ABC) \perp (BOC)$ . Tính độ dài đoạn IJ theo  $a$ .

## BÀI TẬP ÔN TẬP CHƯƠNG III

- Trong các mệnh đề sau đây mệnh đề nào là đúng?
  - Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì chúng song song.
  - Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì chúng song song.
  - Mặt phẳng  $(\alpha)$  vuông góc với đường thẳng  $b$  mà  $b$  vuông góc với đường thẳng  $a$ , thì  $a$  song song với  $(\alpha)$ .
  - Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì chúng song song.



e) Hai đường thẳng cùng vuông góc với một đường thẳng thì chúng song song.

**Trả lời:** a) Đúng; b) Đúng; c) Sai; d) Sai; e) Sai.

2. Trong các điều khẳng định sau đây, điều nào là đúng ?

- a) Khoảng cách của hai đường thẳng chéo nhau là đoạn ngắn nhất trong các đoạn thẳng nối hai điểm bất kì nằm trên hai đường thẳng ấy và ngược lại.
- b) Qua một điểm có duy nhất một mặt phẳng vuông góc với một mặt phẳng khác.
- c) Qua một đường thẳng có duy nhất một mặt phẳng vuông góc với một mặt phẳng khác.
- d) Đường thẳng nào vuông góc với cả hai đường thẳng chéo nhau cho trước là đường vuông góc chung của hai đường thẳng đó.

**Trả lời:** a) Đúng; b) Sai; c) Sai; d) Sai.

3. Hình chóp S.ABCD có đáy là hình vuông ABCD cạnh a, cạnh SA = a và vuông góc với mặt phẳng (ABCD).

- a) Chứng minh rằng các mặt bên của hình chóp là những tam giác vuông.
- b) Mặt phẳng ( $\alpha$ ) đi qua A và vuông góc với cạnh SC lần lượt cắt SB, SC, SD tại B', C', D'. Chứng minh B'D' song song với BD và AB' vuông góc với SB.

**Giải**

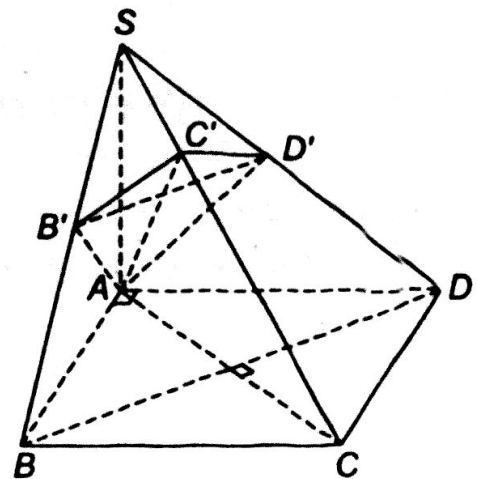
- a) Vì cạnh SA vuông góc với mặt phẳng (ABCD) nên  $SA \perp AD$  và  $SA \perp AB$ . Theo định lí ba đường vuông góc, vì  $CD \perp AD$  nên  $CD \perp SD$  và vì  $BC \perp AB$  nên  $BC \perp SB$ . Vậy bốn mặt bên của hình chóp là những tam giác vuông.

$$b) \left. \begin{array}{l} BD \perp AC \\ BD \perp SA \end{array} \right\} \Rightarrow BD \perp (SAC) \Rightarrow BD \perp SC.$$

Mặt khác vì ( $\alpha$ )  $\perp$  SC nên  $B'D' \perp SC$ .

Hai đường thẳng BD và B'D' cùng nằm trong mặt phẳng (SBD) và cùng vuông góc với SC. Vì SC không vuông góc với (SBD) nên hình chiếu của SC trên mặt phẳng (SBD) sẽ vuông góc với BD và B'D'. Ta suy ra  $BD \parallel B'D'$ .

$$\text{Ta có } \left. \begin{array}{l} BD \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AB' \\ SC \perp (\alpha) \Rightarrow SC \perp AB' \end{array} \right\} \Rightarrow AB' \perp (SBC) \Rightarrow AB' \perp SB.$$



4. Hình chóp S.ABCD có đáy là hình thoi ABCD cạnh a và có góc  $\widehat{BAD} = 60^\circ$ . Gọi O là giao điểm của AC và BD. Đường thẳng SO vuông góc với mặt phẳng (ABCD) và  $SO = \frac{3a}{4}$ . Gọi E là trung điểm của đoạn BC, F là trung điểm của đoạn BE.

- a) Chứng minh mặt phẳng (SOF) vuông góc với mặt phẳng (SBC).  
b) Tính các khoảng cách từ O và A đến mặt phẳng (SBC).

*Giải*

- a) Vì BCD là tam giác đều nên  $DE \perp BC$ . Do đó  $OF \perp BC$ .

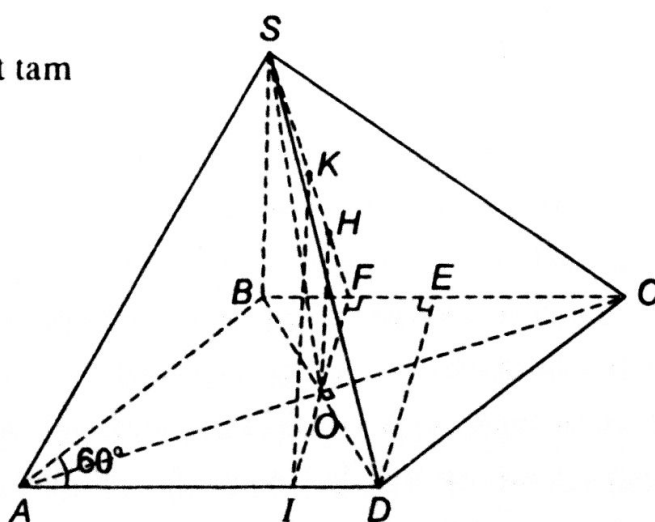
Mặt khác vì  $SO \perp (ABCD)$  nên  $SO \perp BC$ . Ta suy ra  $BC \perp (SOF)$ , do đó  $(SBC) \perp (SOF)$ .

- b) Trong mặt phẳng (SOF) dựng  $OH \perp SF$  thì  $OH \perp (SBC)$ . Xét tam giác SOF vuông tại O ta có

$$OF = \frac{DE}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{4}$$

$$\text{và có: } \frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OF^2} + \frac{1}{OS^2} \\ = \frac{16}{3a^2} + \frac{16}{9a^2} = \frac{64}{9a^2}$$

$$\Rightarrow OH = \frac{3a}{8}$$



Do đó khoảng cách từ O đến mặt phẳng (SBC) là  $OH = \frac{3a}{8}$ .

Gọi  $I = FO \cap AD$ . Trong mặt phẳng (SIF) dựng  $IK \perp SF$ . Vì  $AD \parallel (SBC)$  nên khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) chính là khoảng cách từ I trên AD đến mặt phẳng (SBC). Đó chính là độ dài đoạn IK.

$$\text{Ta có } IK = 2OH = \frac{3a}{4}.$$

5. Tứ diện ABCD có hai mặt ABC và ADC nằm trong hai mặt phẳng vuông góc với nhau. Tam giác ABC vuông tại A có  $AB = a$ ,  $AC = b$ . Tam giác ADC vuông tại D có  $CD = a$ .

- a) Chứng minh các tam giác BAD và BDC là các tam giác vuông.  
b) Gọi I và K lần lượt là trung điểm của AD và BC. Chứng minh IK là đường vuông góc chung của hai đường thẳng AD và BC.

**Giải**

- a) Theo giả thiết  $(ABC) \perp (ADC)$  và  $BA \perp AC$  nên ta có  $BA \perp (ADC)$ . Do đó tam giác  $BAD$  vuông tại  $A$ .

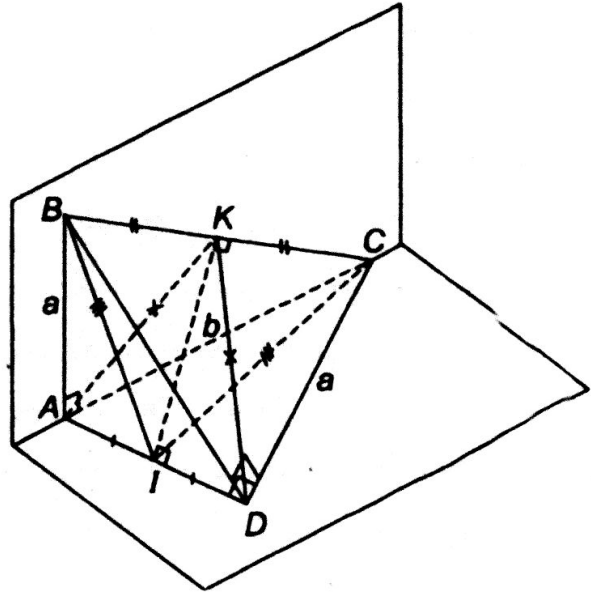
Theo định lý ba đường vuông góc ta có  $BA \perp (ACD)$ ,  $AD \perp DC$  nên  $BD \perp DC$  hay  $BDC$  là tam giác vuông tại  $D$ .

b) Ta có 
$$\left. \begin{aligned} KA &= \frac{BC}{2} \\ KD &= \frac{BC}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow KA = KD$$

Tam giác  $AKD$  cân tại  $K$  nên ta có  $KI \perp AD$ . (1)

Mặt khác hai tam giác vuông  $ABD$  và  $DCA$  bằng nhau vì có  $AD$  chung và có  $AB = DC = a$  nên ta suy ra  $IB = IC$ . Tam giác  $IBC$  cân tại  $I$  nên ta có  $IK \perp BC$ . (2)

Từ (1) và (2) ta suy ra  $IK$  là đoạn vuông góc chung của đường thẳng  $AD$  và  $BC$ .



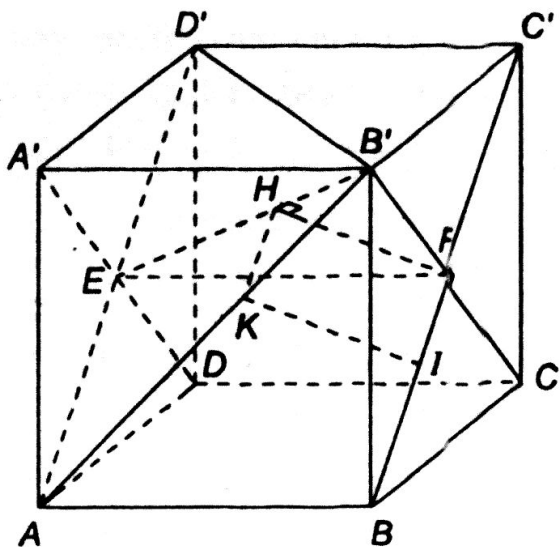
**6. Cho hình lập phương  $ABCD.A'B'C'D'$  cạnh  $a$ .**

- a) Chứng minh  $BC'$  vuông góc với mặt phẳng  $(A'B'CD)$ .  
b) Xác định và tính độ dài đoạn vuông góc chung của  $AB'$  và  $BC'$ .

**Giải**

- a) Ta có  $B'C \perp BC'$  và  $A'B' \perp BC'$  vì  $A'B' \perp (BB'C'C)$ .  
Do đó:  $BC' \perp (A'B'CD)$ .

- b) Mặt phẳng  $(AB'D')$  chứa  $AB'$  và song song với  $BC'$ . Cần tìm hình chiếu của  $BC'$  trên mặt phẳng này.  
Gọi  $E, F$  lần lượt là tâm các hình vuông  $ADD'A'$  và  $BCC'B'$ . Trong mặt phẳng  $(A'B'CD)$  kẻ  $FH \perp EB'$  ( $H \in EB'$ ) nên theo câu a, khi đó  $FH \perp BC'$  hay  $FH \perp AD'$ . Vậy  $FH \perp (AB'D')$ . Do đó hình chiếu của  $BC'$  trên mặt phẳng  $(AB'D')$  là đường thẳng đi qua  $H$  và song song với  $BC'$ .



Đường thẳng đó cắt  $AB'$  tại  $K$ . Từ  $K$  ta vẽ  $KI$  song song với  $HF$  cắt  $BC'$  tại  $I$ . Ta có  $IK$  là đường vuông góc chung của  $AB'$  và  $BC'$ . Xét tam giác vuông  $EFB'$  ta có:

$$\frac{1}{FH^2} = \frac{1}{FE^2} + \frac{1}{FB'^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{3}{a^2}.$$

Ta tính được  $KI = FH = \frac{a\sqrt{3}}{3}$ .

**Chú ý:** Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau  $AB'$  và  $BC'$  bằng khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song  $(AB'D')$  và  $(BDC')$  lần lượt chứa hai đường thẳng chéo nhau đó. Khoảng cách này bằng  $\frac{1}{3}$  độ dài đường chéo  $A'C$ . (Bài tập 5, §5)

7. Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy là hình thoi  $ABCD$  cạnh  $a$  có góc  $\widehat{BAD} = 60^\circ$  và  $SA = SB = SD = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ .

- Tính khoảng cách từ  $S$  đến mặt phẳng  $(ABCD)$  và độ dài cạnh  $SC$ .
- Chứng minh mặt phẳng  $(SAC)$  vuông góc với mặt phẳng  $(ABCD)$ .
- Chứng minh  $SB$  vuông góc với  $BC$ .
- Gọi  $\varphi$  là góc giữa hai mặt phẳng  $(SBD)$  và  $(ABCD)$ . Tính  $\tan \varphi$ .

*Giải*

- Gọi  $H$  là hình chiếu vuông góc của  $S$  trên mặt phẳng  $(ABCD)$ .

Vì  $SA = SB = SD = \frac{a\sqrt{3}}{2}$  nên  $HA = HB = HD$ .

Vậy  $H$  là trọng tâm của tam giác đều  $ABD$ .

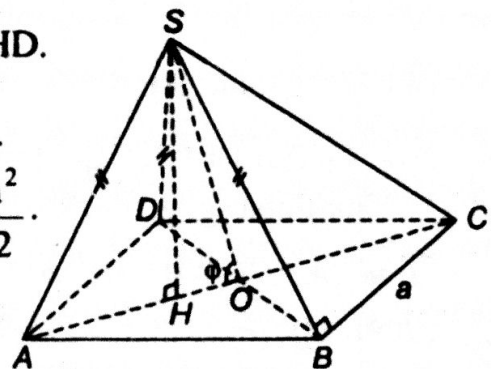
Ta có  $SH^2 = SA^2 - AH^2 = \frac{3a^2}{4} - \frac{a^2}{3} = \frac{5a^2}{12}$ .

$\Rightarrow SH = \frac{a\sqrt{15}}{6}$ .

Mặt khác  $CH = CO + OH = \frac{a\sqrt{3}}{2} + \frac{a\sqrt{3}}{6} = \frac{2\sqrt{3}a}{3}$ .

Xét tam giác vuông  $SHC$  ta có:  $SC^2 = SH^2 + HC^2 = \frac{5a^2}{12} + \frac{4a^2}{3} = \frac{7a^2}{4}$ .

Vậy  $SC = \frac{a\sqrt{7}}{2}$ .



b) Ta có  $H \in AC$ , do đó  $SH \subset (SAC)$ .

Vì  $SH \perp (ABCD)$  nên  $(SAC) \perp (ABCD)$ .

c) Ta có  $SB^2 + BC^2 = \frac{3a^2}{4} + a^2 = \frac{7a^2}{4} = SC^2$ . Vậy tam giác  $SBC$  vuông tại B hay  $SB \perp BC$ .

d) Ta có  $OH \perp BD$  và  $OS \perp BD$  nên  $\varphi = \widehat{SOH}$  là góc giữa hai mặt phẳng  $(SBD)$  và  $(ABCD)$ . Khi đó:  $\tan \varphi = \frac{SH}{HO} = \frac{a\sqrt{15}}{6} \cdot \frac{6}{a\sqrt{3}} = \sqrt{5}$ .

## CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM CHƯƠNG III

1. Trong các mệnh đề sau đây mệnh đề nào là đúng ?

(A) Từ  $\overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{AC}$  ta suy ra  $\overrightarrow{BA} = -3\overrightarrow{CA}$ .

(B) Từ  $\overrightarrow{AB} = -3\overrightarrow{AC}$  ta suy ra  $\overrightarrow{CB} = 2\overrightarrow{AC}$ .

(C) Vì  $\overrightarrow{AB} = -2\overrightarrow{AC} + 5\overrightarrow{AD}$  nên bốn điểm A, B, C, D cùng thuộc một mặt phẳng.

(D) Nếu  $\overrightarrow{AB} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$  thì B là trung điểm của đoạn AC.

**Trả lời:**  $\overrightarrow{AB} = -2\overrightarrow{AC} + 5\overrightarrow{AD}$  nên A, B, C, D đồng phẳng. (Chọn C).

2. Tìm mệnh đề sai trong các mệnh đề sau đây:

(A) Vì  $\overrightarrow{NM} + \overrightarrow{NP} = \vec{0}$  nên N là trung điểm của đoạn MP.

(B) Vì I là trung điểm của đoạn AB nên từ một điểm O bất kì ta có  $\overrightarrow{OI} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$ .

(C) Từ hệ thức  $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AC} - 8\overrightarrow{AD}$  ta suy ra ba vectơ  $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$  đồng phẳng.

(D) Vì  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} = \vec{0}$  nên bốn điểm A, B, C, D cùng thuộc một mặt phẳng.

**Trả lời:** Vì  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{AA} = \vec{0}$  luôn đúng với mọi A, B, C, D. Chọn (D).

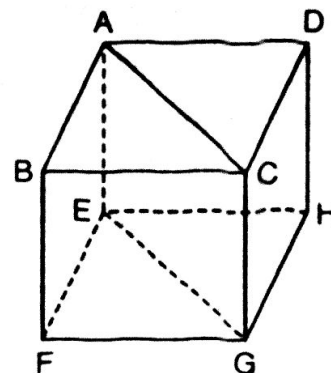
3. Trong các kết quả sau đây, kết quả nào đúng ?

Cho hình lập phương ABCD.EFGH có cạnh bằng a.

Ta có:  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{EG}$  bằng

(A)  $a^2$ ;

(B)  $a^2\sqrt{2}$ ;



(C)  $a^2\sqrt{3}$ ;

(D)  $\frac{a^2\sqrt{2}}{2}$ .

**Trả lời:**  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{EG} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \cdot AC \cdot \cos 45^\circ = a \cdot a\sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = a^2$ . Chọn (A).

4. Trong các mệnh đề sau đây mệnh đề nào là đúng ?

- (A) Nếu đường thẳng a vuông góc với đường thẳng b và đường thẳng b vuông góc với đường thẳng c thì a vuông góc với c.
- (B) Nếu đường thẳng a vuông góc với đường thẳng b và đường thẳng b song song với đường thẳng c thì a vuông góc với c.
- (C) Cho ba đường thẳng a, b, c vuông góc với nhau từng đôi một. Nếu có một đường thẳng d vuông góc với a thì d song song với b hoặc c.
- (D) Cho hai đường thẳng a và b song song với nhau. Một đường thẳng c vuông góc với a thì c vuông góc với mọi đường thẳng nằm trong mặt phẳng (a, b).

**Trả lời:** (A), (C), (D) sai. Chọn (B).

5. Trong các mệnh đề sau đây hãy tìm mệnh đề đúng.

- (A) Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thứ ba thì song song với nhau.
- (B) Nếu hai mặt phẳng vuông góc với nhau thì mọi đường thẳng thuộc mặt phẳng này sẽ vuông góc với mặt phẳng kia.
- (C) Hai mặt phẳng ( $\alpha$ ) và ( $\beta$ ) vuông góc với nhau và cắt nhau theo giao tuyến d. Với mỗi điểm A thuộc ( $\alpha$ ) và mỗi điểm B thuộc ( $\beta$ ) thì ta có đường thẳng AB vuông góc với d.
- (D) Nếu hai mặt phẳng ( $\alpha$ ) và ( $\beta$ ) đều vuông góc với mặt phẳng ( $\gamma$ ) thì giao tuyến d của ( $\alpha$ ) và ( $\beta$ ) nếu có sẽ vuông góc với ( $\gamma$ ).

**Trả lời:** (A), (B), (C) sai. Chọn (D).

6. Tìm mệnh đề sai trong các mệnh đề sau đây:

- (A) Hai đường thẳng a và b trong không gian có các vectơ chỉ phương lần lượt là  $\vec{u}$  và  $\vec{v}$ . Điều kiện cần và đủ để a và b chéo nhau là a và b không có điểm chung và hai vectơ  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  không cùng phương.
- (B) Cho a, b là hai đường thẳng chéo nhau và vuông góc với nhau. Đường vuông góc chung của a và b nằm trong mặt phẳng chứa đường này và vuông góc với đường kia.
- (C) Không thể có một hình chóp tứ giác S.ABCD nào có hai mặt bên (SAB) và (SCD) cùng vuông góc với mặt phẳng đáy.



- (D) Cho  $\vec{u}, \vec{v}$  là hai vectơ chỉ phương của hai đường thẳng cắt nhau nằm trong mặt phẳng  $(\alpha)$  và  $\vec{n}$  là vectơ chỉ phương của đường thẳng  $\Delta$ . Điều kiện cần và đủ để  $\Delta \perp (\alpha)$  là  $\vec{n} \cdot \vec{u} = 0$  và  $\vec{n} \cdot \vec{v} = 0$ .

*Trả lời:* (A), (B), (D) đúng. Chọn (C).

7. Trong các mệnh đề sau đây mệnh đề nào là đúng ?

- (A) Một đường thẳng cắt hai đường thẳng cho trước thì cả ba đường thẳng đó cùng nằm trong một mặt phẳng.  
(B) Một đường thẳng cắt hai đường thẳng cắt nhau cho trước thì cả ba đường thẳng đó cùng nằm trong một mặt phẳng.  
(C) Ba đường thẳng cắt nhau từng đôi một thì cùng nằm trong một mặt phẳng.  
(D) Ba đường thẳng cắt nhau từng đôi một và không nằm trong một mặt phẳng thì đồng quy.

*Trả lời:* (A), (B), (C) sai. Chọn (D).

8. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào là đúng ?

- (A) Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song.  
(B) Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song.  
(C) Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song.  
(D) Hai đường thẳng không cắt nhau và không song song thì chéo nhau.

*Trả lời:* (B), (C), (D) sai. Chọn (A).

9. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào là đúng ?

- (A) Hai đường thẳng phân biệt cùng song song với một mặt phẳng thì song song với nhau.  
(B) Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì cắt nhau.  
(C) Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì vuông góc với nhau.  
(D) Một mặt phẳng  $(\alpha)$  và một đường thẳng  $a$  không thuộc  $(\alpha)$  cùng vuông góc với đường thẳng  $b$  thì  $(\alpha)$  song song với  $a$ .

*Trả lời:* (A), (B), (C) sai. Chọn (D).

10. Tìm mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau đây.

- (A) Đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau là đoạn ngắn nhất trong các đoạn thẳng nối hai điểm bất kì lần lượt nằm trên hai đường thẳng ấy và ngược lại.  
(B) Qua một điểm cho trước có duy nhất một mặt phẳng vuông góc với một mặt phẳng cho trước.



- (C) Qua một điểm cho trước có duy nhất một đường thẳng vuông góc với một đường thẳng cho trước.
- (D) Cho ba đường thẳng  $a, b, c$  chéo nhau từng đôi một. Khi đó ba đường thẳng này sẽ nằm trong ba mặt phẳng song song với nhau từng đôi một.

*Trả lời:* (B), (C), (D) sai. Chọn (A).

11. Khoảng cách giữa hai cạnh đối của một tứ diện đều cạnh  $a$  bằng kết quả nào trong các kết quả sau đây:

(A)  $\frac{3a}{2}$ ;                      (B)  $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ ;                      (C)  $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ ;                      (D)  $a\sqrt{2}$ .

*Trả lời:* Xem bài tập 8 mục §5 chương III. Chọn (B).

## BÀI TẬP ÔN TẬP CUỐI NĂM

1. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho các điểm  $A(1; 1)$ ,  $B(0; 3)$ ,  $C(2; 4)$ . Xác định ảnh của tam giác ABC qua các phép biến hình sau:
- Phép tịnh tiến theo vectơ  $\vec{v} = (2; 1)$ .
  - Phép đối xứng qua trục Ox.
  - Phép đối xứng qua tâm  $I(2; 1)$ .
  - Phép quay tâm O góc  $90^\circ$ .
  - Phép đồng dạng có được bằng cách thực hiện liên tiếp phép đối xứng qua trục Oy và phép vị tự tâm O tỉ số  $k = -2$ .

*Giải*

Gọi tam giác  $A'B'C'$  là ảnh của tam giác ABC qua các phép biến hình trên.

a) Biểu thức tọa độ 
$$\begin{cases} x' = 2 + x \\ y' = 1 + y \end{cases}$$

Ảnh của  $A, B, C$  qua  $T_{\vec{v}}$  lần lượt là  $A'(3; 2)$ ,  $B'(2; 4)$ ,  $C'(4; 5)$ .

b) Biểu thức tọa độ 
$$\begin{cases} x' = x \\ y' = -y \end{cases}$$

$A'(1; -1)$ ,  $B'(0; -3)$ ,  $C'(2; -4)$ .

c) Biểu thức tọa độ 
$$\begin{cases} x' = 4 - x \\ y' = 2 - y \end{cases}$$

$A'(3; 1)$ ,  $B'(4; -1)$ ,  $C'(2; -2)$ .

- d) Vẽ hình ta được  $A'(-1; 1)$ ,  $B'(-3; 0)$ ,  $C'(-4; 2)$ .
- e) Vẽ hình ta được  $A'(2; -2)$ ,  $B'(0; -6)$ ,  $C'(4; -8)$ .
2. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn tâm O. Gọi G và H tương ứng là trọng tâm và trực tâm của tam giác, các điểm  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$  lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, CA, AB.
- a) Tìm phép vị tự F biến A, B, C tương ứng thành  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$ .
- b) Chứng minh rằng O, G, H thẳng hàng.
- c) Tìm ảnh của O qua phép vị tự F.
- d) Gọi  $A''$ ,  $B''$ ,  $C''$  lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng AH, BH, CH;  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $C_1$  theo thứ tự là giao điểm thứ hai của các tia AH, BH, CH với đường tròn (O);  $A'_1$ ,  $B'_1$ ,  $C'_1$  tương ứng là chân các đường cao đi qua A, B, C. Tìm ảnh của A, B, C,  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $C_1$  qua phép vị tự tâm H tỉ số  $\frac{1}{2}$ .
- e) Chứng minh chín điểm  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$ ,  $A''$ ,  $B''$ ,  $C''$ ,  $A'_1$ ,  $B'_1$ ,  $C'_1$  cùng thuộc một đường tròn (đường tròn này gọi là đường tròn Ơ-le của tam giác ABC).

### Hướng dẫn

- a) F là phép vị tự tâm G, tỉ số  $-\frac{1}{2}$ .
- b) Để ý rằng O là trực tâm của tam giác  $A'B'C'$ .
- c)  $F(O) = O_1$  là trung điểm của OH.
- d) Ảnh của A, B, C,  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $C_1$  qua phép vị tự tâm H tỉ số  $\frac{1}{2}$  tương ứng là  $A''$ ,  $B''$ ,  $C''$ ,  $A'_1$ ,  $B'_1$ ,  $C'_1$ .
- e) Chứng minh  $A''$ ,  $B''$ ,  $C''$ ,  $A'_1$ ,  $B'_1$ ,  $C'_1$  cùng thuộc đường tròn  $(O_1)$ . Sau đó chứng minh  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$  cũng thuộc đường tròn  $(O_1)$ . Chẳng hạn, chứng minh  $O_1A'_1 = O_1A'$ .
3. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thang với AB là đáy lớn. Gọi M là trung điểm của đoạn AB, E là giao điểm của hai cạnh bên của hình thang ABCD và G là trọng tâm của tam giác ECD.
- a) Chứng minh rằng bốn điểm S, E, M, G cùng thuộc một mặt phẳng  $(\alpha)$  và mặt phẳng này cắt cả hai mặt phẳng (SAC) và (SBD) theo cùng một giao tuyến d.
- b) Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng (SAD) và (SBC).
- c) Lấy một điểm K trên đoạn SE và gọi  $C' = SC \cap KB$ ,  $D' = SD \cap KA$ . Chứng minh rằng giao điểm của  $AC'$  và  $BD'$  thuộc đường thẳng d nói trên.

*Giải*

a) Gọi N là giao điểm của EM và CD.

Vì M là trung điểm của AB nên

N là trung điểm của CD (do ABCD là hình thang)

$\Rightarrow$  EN đi qua G

$\Rightarrow S, E, M, G \in (\alpha) = (SEM)$ .

Gọi O là giao điểm của AC và BD.

Ta có  $(\alpha) \cap (SAC) = SO$

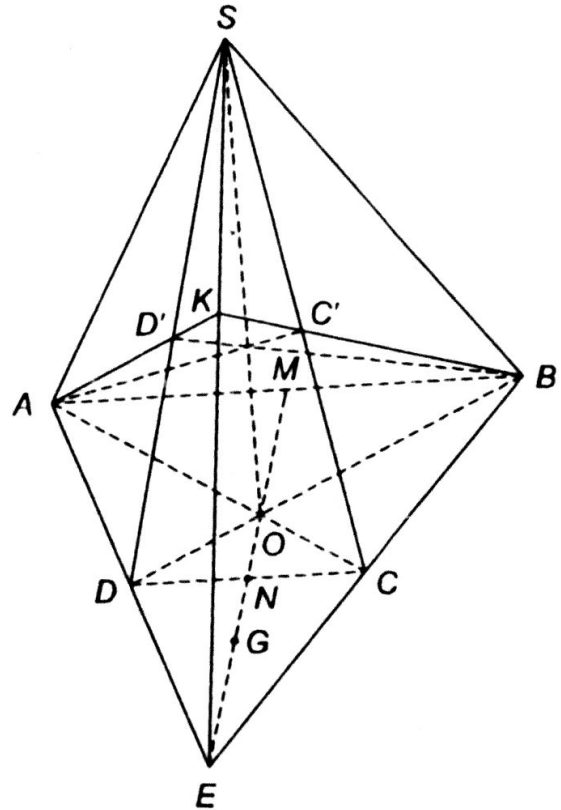
và  $(\alpha) \cap (SBD) = SO = d$

b) Ta có  $(SAD) \cap (SBC) = SE$ .

c) Gọi  $O' = AC' \cap BD'$ .

Ta có  $AC' \subset (SAC), BD' \subset (SBD)$

$\Rightarrow O' \in SO = d = (SAC) \cap (SBD)$ .



4. Cho hình lăng trụ tứ giác ABCD.A'B'C'D' có E, F, M và N lần lượt là trung điểm của AC, BD, AC' và BD'. Chứng minh  $MN = EF$ .

*Giải*

Tứ giác ACC'A' là hình bình hành nên AC' và A'C cắt nhau tại trung điểm M của mỗi đường. Tương tự BD' và B'D cắt nhau tại trung điểm N của mỗi đường.

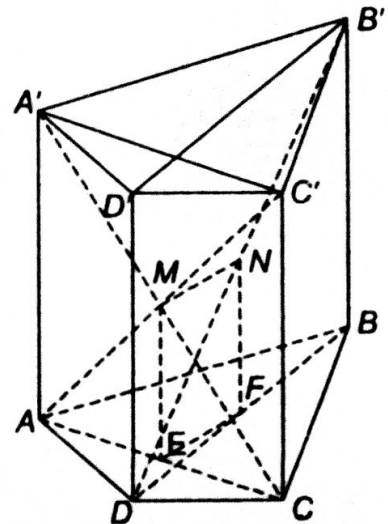
Ta có:

$$\begin{cases} ME \parallel CC' \\ ME = \frac{1}{2}CC' \end{cases} \text{ (ME là đường trung bình của tam giác ACC').}$$

Tương tự, trong tam giác DBB', ta có:

$$\begin{cases} NF \parallel BB' \\ NF = \frac{1}{2}BB' \end{cases}$$

Tứ giác MNFE là hình bình hành nên  $MN = EF$ .



5. Cho hình lập phương  $ABCD.A'B'C'D'$  có  $E$  và  $F$  lần lượt là trung điểm của các cạnh  $AB$  và  $DD'$ . Hãy xác định các thiết diện của hình lập phương cắt bởi các mặt phẳng  $(EFB)$ ,  $(EFC)$ ,  $(EFC')$  và  $(EFK)$  với  $K$  là trung điểm của cạnh  $B'C'$ .

*Giải*

Gọi  $\mathcal{P}$  là hình lập phương.

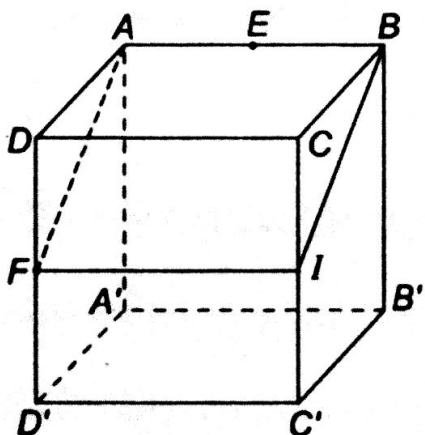
$(EFB) \cap \mathcal{P} = ABIF$  với  $FI \parallel AB$  (hình a)

$(EFC) \cap \mathcal{P} = ECFH$  với  $CF \parallel EH$  (hình b).

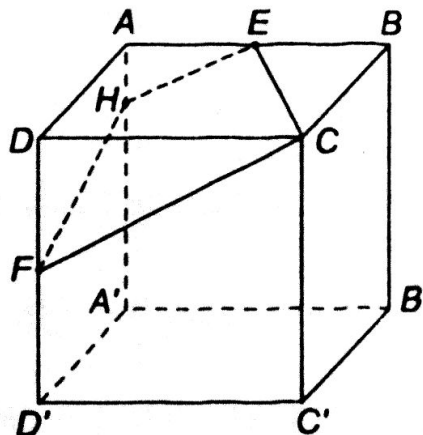
$(EFC') \cap \mathcal{P} = EMC'FL$  với  $EM \parallel FC'$  và  $FL \parallel C'M$  (hình c)

Gọi  $E'$  là hình chiếu vuông góc của  $E$  trên mặt phẳng  $(A'B'C'D')$ .

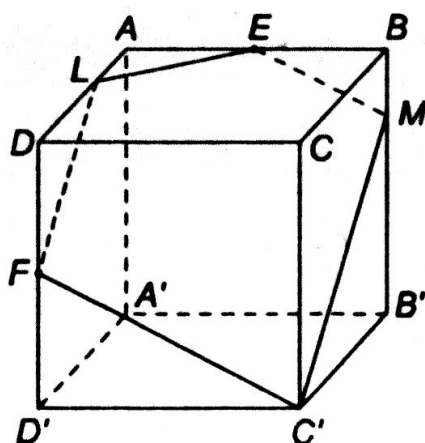
Gọi  $N = EF \cap E'D'$ ,  $P = NK \cap C'D'$ . Vẽ  $ER \parallel KP$ ,  $EQ \parallel FP$ , ta có thiết diện là hình lục giác đều  $ERFPKQ$  (hình d)



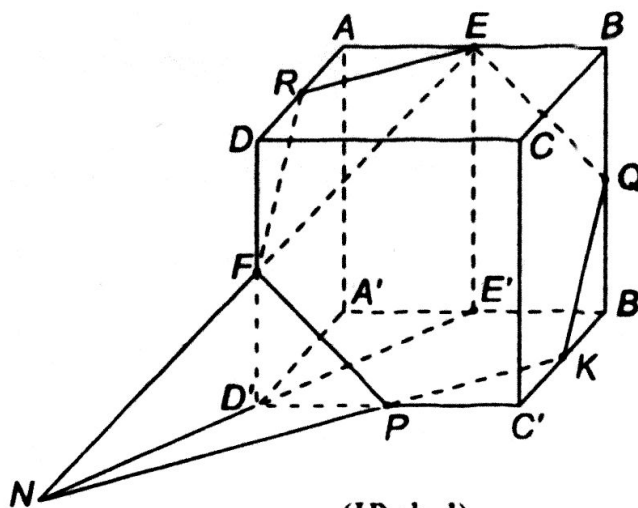
(Hình a)



(Hình b)



(Hình c)



(Hình d)

6. Cho hình lập phương  $ABCD.A'B'C'D'$  có cạnh bằng  $a$ .

- Hãy xác định đường vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau  $BD'$  và  $B'C$ .
- Tính khoảng cách của hai đường thẳng  $BD'$  và  $B'C$ .

*Giải*

$$\text{a) Ta có } \left. \begin{array}{l} B'C \perp BC' \\ B'C \perp D'C' \end{array} \right\} \Rightarrow B'C \perp (D'C'B).$$

Gọi  $I$  là tâm hình vuông  $BCC'B'$ .

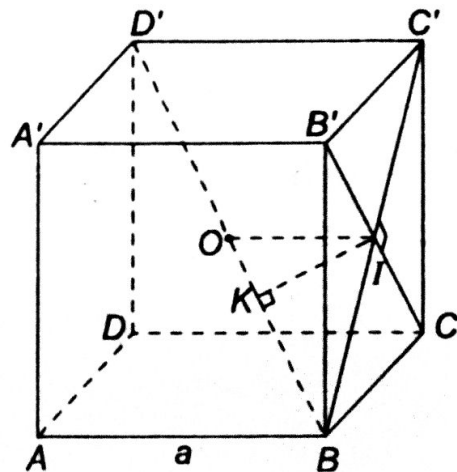
Trong mặt phẳng  $(BC'D')$  vẽ  $IK \perp BD'$  tại  $K$ .

Ta có  $IK$  là đường vuông góc chung của  $BD'$  và  $B'C$ .

- Gọi  $O$  là trung điểm của  $BD'$ :

Vì  $\triangle IOB$  vuông tại  $I$  nên :

$$\begin{aligned} \frac{1}{KI^2} &= \frac{1}{IO^2} + \frac{1}{IB^2} = \frac{1}{\left(\frac{a}{2}\right)^2} + \frac{1}{\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} \\ &= \frac{4}{a^2} + \frac{2}{a^2} = \frac{6}{a^2} \\ \Rightarrow KI &= \frac{a}{\sqrt{6}} = \frac{a\sqrt{6}}{6}. \end{aligned}$$



7. Cho hình thang  $ABCD$  vuông tại  $A$  và  $B$ , có  $AD = 2a$ ,  $AB = BC = a$ . Trên tia  $Ax$  vuông góc với mặt phẳng  $(ABCD)$  lấy một điểm  $S$ . Gọi  $C'$ ,  $D'$  lần lượt là hình chiếu vuông góc của  $A$  trên  $SC$  và  $SD$ . Chứng minh rằng:

- $\widehat{SBC} = \widehat{SCD} = 90^\circ$ .
- $AD'$ ,  $AC'$  và  $AB$  cùng nằm trên một mặt phẳng.
- Chứng minh rằng đường thẳng  $C'D'$  luôn luôn đi qua một điểm cố định khi  $S$  di động trên tia  $Ax$ .

*Giải*

$$\begin{aligned} \text{a) Ta có } \left\{ \begin{array}{l} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{array} \right. &\Rightarrow BC \perp (SAB) \\ &\Rightarrow BC \perp SB \Rightarrow \widehat{SBC} = 90^\circ. \end{aligned}$$

Gọi K là trung điểm của AD ta  
có  $CK = AB = \frac{1}{2} AD$  nên tam  
giác ACD vuông tại C.

$$\text{Ta có } \begin{cases} CD \perp AC \\ CD \perp SA \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SAC)$$

$$\Rightarrow CD \perp SC \Rightarrow \widehat{SCD} = 90^\circ$$

- b) Trong mặt phẳng (SAC) vẽ  $AC' \perp SC$  và  
trong mặt phẳng (SAD) vẽ  $AD' \perp SD$ .

Ta có  $AC' \perp CD$  (vì  $CD \perp (SAC)$ )

và  $AC' \perp SC$  nên suy ra  $AC' \perp (SCD)$

$$\Rightarrow AC' \perp SD.$$

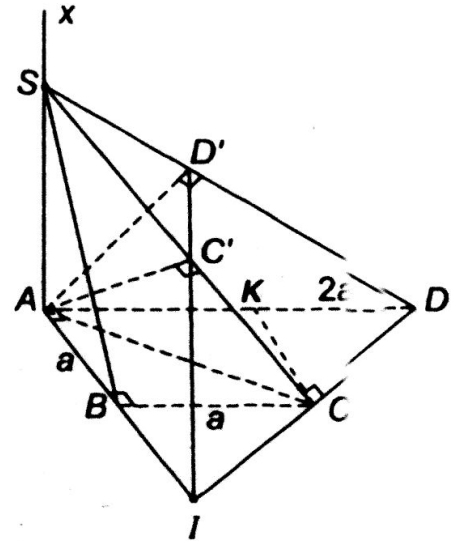
Ta lại có  $AB \perp AD$  và  $AB \perp SA$

$$\text{nên } AB \perp (SAD) \Rightarrow AB \perp SD.$$

Ba đường thẳng  $AD'$ ,  $AC'$  và  $AB$  cùng đi qua điểm A và vuông góc với SD nên cùng nằm trong mặt phẳng  $(\alpha)$  qua A và vuông góc với SD

- c) Ta có  $C'D'$  là giao tuyến của  $(\alpha)$  với mặt phẳng (SCD). Do đó khi S di động trên tia Ax thì  $C'D'$  luôn luôn đi qua điểm I cố định là giao điểm của AB và CD.

$$(AB \subset (\alpha), CD \subset (SCD) \Rightarrow I \in (\alpha) \cap (SCD) = C'D').$$



## MỤC LỤC

### **CHƯƠNG I. Phép dời hình và phép đồng dạng trong mặt phẳng**

§1. Phép biến hình .....	5
§2. Phép tịnh tiến .....	5
§3. Phép đối xứng trục .....	7
§4. Phép đối xứng tâm .....	10
§5. Phép quay .....	11
§6. Khái niệm về phép dời hình và hai hình bằng nhau .....	13
§7. Phép vị tự .....	15
§8. Phép đồng dạng .....	17
Bài tập ôn tập chương I .....	19
Câu hỏi trắc nghiệm chương I .....	22

### **CHƯƠNG II. Đường thẳng và mặt phẳng trong không gian. Quan hệ song song**

§1. Đại cương về đường thẳng và mặt phẳng .....	25
§2. Hai đường thẳng chéo nhau và hai đường thẳng song song .....	32
§3. Đường thẳng và mặt phẳng song song .....	35
§4. Hai mặt phẳng song song .....	39
Bài tập ôn tập chương II .....	45
Câu hỏi trắc nghiệm chương II .....	47

### **CHƯƠNG III. Vectơ trong không gian. Quan hệ vuông góc trong không gian**

§1. Vectơ trong không gian .....	51
§2. Hai đường thẳng vuông góc .....	57
§3. Đường thẳng vuông góc với mặt phẳng .....	62
§4. Hai mặt phẳng vuông góc .....	68
§5. Khoảng cách .....	76
Bài tập ôn tập chương III .....	81
Câu hỏi trắc nghiệm chương III .....	86
Bài tập ôn tập cuối năm .....	89



## **NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI**

*16 Hàng Chuối - Hai Bà Trưng - Hà Nội*

*Điện thoại : (04) 3971 4896; (04) 3972 4770 - Fax : (04) 3971 4899*

---

*Chịu trách nhiệm xuất bản :*

**Giám đốc : PHÙNG QUỐC BẢO**

**Tổng biên tập : PHẠM THỊ TRÂM**

**Biên tập : Ngọc Lâm**

**Trình bày : Diệu Tâm**

**Bìa : Công ty Sách Hoa Hồng**

**Đối tác liên kết xuất bản : Công ty Sách Hoa Hồng**

---

### **GIẢI BÀI TẬP HÌNH HỌC 11**

---

**Mã số : 1L-198 ĐH2009**

**In 4000 cuốn, khổ 16 x 24cm tại Công ty In Song Nguyên.**

**Số xuất bản: 630-2009/CXB/04-100/ĐHQGHN, ngày 09/07/2009.**

**Quyết định xuất bản số : 198 LK-TN/XB.**

**In xong và nộp lưu chiểu quý III năm 2009.**